



THESIS

PENGUJIAN HIPOTESIS PARAMETER KOMPONEN SPLINE DALAM MODEL REGRESI NONPARAMETRIK CAMPURAN SPLINE DAN KERNEL

**FAULINA KHUSNIAWATI
NRP. 1315201011**

**DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, MS
Dr. Muhammad Mashuri, MT.**

PROGRAM MAGISTER

JURUSAN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2017



THESIS

SIMULTANEOUS HYPOTHESIS TESTING OF SPLINE TRUNCATED MODEL IN NONPARAMETRIC SPLINE AND KERNEL REGRESSION

FAULINA KHUSNIAWATI
NRP. 1315201011

SUPERVISOR
Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, MS
Dr. Muhammad Mashuri, MT.

MAGISTER PROGRAM

STATISTICS DEPARTMENT

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE

SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY

SURABAYA

2017

**PENGUJIAN HIPOTESIS PARAMETER KOMPONEN SPLINE
DALAM MODEL REGRESI NONPARAMETRIK CAMPURAN
SPLINE DAN KERNEL
(Studi Kasus: Angka Fertilitas Total)**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Oleh:

**FAULINA KHUSNIAWATI
NRP. 1315201011**

Tanggal Ujian : 17 Januari 2017
Periode Wisuda : Maret 2017

Disetujui oleh:

1. Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, M.Si
NIP. 19650603 198903 1 003

(Pembimbing I)

2. Dr. Muhammad Mashuri, MT
NIP. 19620408 198701 1 001

(Pembimbing II)

3. Dr. Dra. Ismaini Zain, M.Si
NIP. 19600525 198803 2 001

(Penguji)

4. Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si
NIP. 19691212 199303 2 002

(Penguji)



Direktur Program Pasca Sarjana,

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

PENGUJIAN HIPOTESIS PARAMETER KOMPONEN SPLINE DALAM MODEL REGRESI NONPARAMETRIK CAMPURAN SPLINE DAN KERNEL

Nama Mahasiswa : Faulina Khusniawati
NRP : 1315201011
Pembimbing 1 : Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, MS
Pembimbing 2 : Dr. Muhammad Mashuri, MT.

ABSTRAK

Analisis Regresi adalah sebuah teknik statistik untuk menyelidiki hubungan antara dua variabel atau lebih. Dalam model regresi memungkinkan variabel respon mengikuti kurva regresi nonparametrik karena fungsi regresi tidak diketahui bentuknya. Hubungan variabel respon dengan beberapa variabel prediktor pada regresi nonparametrik tidak selalu menggunakan satu jenis pendekatan seperti spline, kernel, atau deret fourier. Hal ini banyak ditemukan pada regresi nonparametrik antara satu variabel prediktor dengan variabel prediktor lainnya mempunyai pola yang berbeda dengan respon. Pada penelitian ini hubungan antar variabel prediktor dan variabel respon mengikuti model regresi nonparametrik aditif, di mana variabel prediktor didekati dengan fungsi spline *truncated* dan fungsi kernel. Estimasi kurva regresi nonparametrik diperoleh dari *Ordinal Least Square (OLS)* dan pemilihan titik knot menggunakan metode *Generalized Cross Validation (GCV)*. Inferensi statistik khususnya pengujian hipotesis untuk kurva regresi dengan pendekatan spline dan kernel dapat dilakukan dengan metode *Likelihood Ratio Test (LRT)*. Estimator diperoleh dari membandingkan fungsi likelihood dibawah populasi dan fungsi likelihood di bawah H_0 . Selanjutnya pengujian hipotesis yang diperoleh dengan campuran spline dan kernel diaplikasikan pada data Angka Fertilitas Total di Jawa Timur.

Kata kunci : Regresi Nonparametrik, Spline, Kernel, Angka Fertilitas Total

HYPOTHESIS TEST OF SPLINE COMPONENT PARAMETERS IN MIXED NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL OF SPLINE AND KERNEL

Name : Faulina Khusniawati
NRP : 1315201011
Supervisor 1 : Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, MS
Supervisor 2 : Dr. Muhammad Mashuri, MT.

ABSTRACT

Regression analysis is a statistical technique to model and investigate the relationship between two or more variables. In the regression model allows a response variable follows the curve of the nonparametric regression curves as a function of unknown shape. The correlation of response variables with multiple predictor variables on nonparametric regression does not always use one type approaches such as spline, kernel, or fourier series. It is mostly found in the predictor variables that follow nonparametric regression curves is different between the predictor variable with other predictor variable. Given data pairs in which the correlation between the predictor variables and the response variable follows the additive nonparametric regression model with the predictor variable component approximated by spline function and the truncated kernel function. Estimated nonparametric regression curve was obtained from the *Ordinal Least Square* (OLS) and point selection knots using *Generalized Cross Validation* (GCV). Statistical inference particular hypothesis testing for regression curve with spline and kernel approach can be done using *Likelihood Ratio Test* (LRT). The estimator obtained from comparing the likelihood function under the population and the likelihood function under H_0 . Further, testing hypothesis obtained with a mixture of spline and kernel applied to the case of fertility in East Java.

Keywords: Nonparametric Regression, Spline, Kernel, Total Fertility Rate

KATA PENGANTAR



Dengan menyebut asma Allah Subhanahuwata'ala yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Segala puji syukur tercurahkan kepada Allah Subhanahuwata'ala sumber inspirasi kehidupan yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya dalam penyelesaian tesis ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad Sholallahualaihiwassalam, pemimpin sekaligus sebaik-baik suri tauladan bagi kehidupan umat manusia, sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *“Pengujian Hipotesis Parameter Komponen Spline dalam Model Regresi Nonparametrik Campuran Spline dan Kernel”*.

Dalam penyusunan skripsi ini, peneliti memperoleh banyak inspirasi serta bantuan dari berbagai pihak, karena itu peneliti mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, MS selaku pembimbing I dan Dr. Muhammad Mashuri, M.T. selaku pembimbing II yang dengan penuh kesabaran dan keikhlasan dalam membimbing penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan tepat waktu.
2. Dr. Kartika Fithriasari dan Dr. Ismaini Zain selaku Dosen penguji yang telah memberikan nasihat, saran, arahan demi kebaikan penulis.

3. Dr. Setiawan selaku dosen wali penulis yang telah membantu penulis selama menjadi mahasiswa di Institut Teknologi Sepuluh Nopember serta segenap dosen-dosen statistika yang telah memberikan ilmu pengetahuan selama perkuliahan.
4. Kedua orang tua dan mertua yang luar biasa, suamiku yang telah mendampingi selalu hari demi hari dan memberikan semangat dalam menyelesaikan tesis ini, serta adikku dan adik iparku beserta seluruh keluarga besar peneliti yang menjadi motivasi dalam penelitian ini.
5. Teman-teman jurusan magister Statistika 2015 yang selalu memberi motivasi, inspirasi, dan semangat.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pemerintah maupun masyarakat. Saran dan kritik sangat penulis harapkan, agar dapat terpenuhinya kemanfaatan baik bagi penulis pribadi serta khalayak civitas akademika.

Surabaya, Januari 2017

Penyusun

Faulina Khusniawati

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	Ix
DAFTAR GAMBAR	x
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian	7
1.4 Manfaat Penelitian	7
1.5 Batasan Penelitian	8
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	9
2.1 Analisis Regresi Parametrik	9
2.2 Regresi Nonparametrik Spline <i>Truncated</i>	10
2.3. Regresi Nonparametrik Kernel	12
2.4 Estimator campuran Spline dan Kernel	13
2.5 Uji Hipotesis	16
2.6 Teorema Dasar Terkait Aljabar	17
2.7 Koefisien Determinasi	18
2.8 Angka Fertilitas Total	18
2.9 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Angka Fertilitas Total	19
BAB 3. METODE PENELITIAN	29
3.1 Sumber Data	29
3.2 Variabel Penelitian	29
3.3 Tahapan Penelitian	30

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1 Bentuk Model regresi Campuran Kernel dan Spline	35
4.2 Estimasi Kurva Regresi Campuran Kernel dan Spline	36
4.3 Pengujian Hipotesis	42
4.4 Aplikasi Model Campuran Spline dan Kernel pada Angka Fertilitas Total di Jawa Timur	55
4.5 Uji Asumsi Residual	80
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	85
5.1 Kesimpulan	85
5.2 Saran	95
DAFTAR PUSTAKA	97
LAMPIRAN	101
BIOGRAFI PENULIS	119

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1. Variabel Penelitian	29
Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor	55
Tabel 4.2 Nilai GCV dengan Satu Titik Knot	60
Tabel 4.3 Nilai GCV dengan DuaTitik Knot	61
Tabel 4.4 Nilai GCV dengan TigaTitik Knot	63
Tabel 4.5 Perbandingan Nilai GCV Minimum	65
Tabel 4.6 Estimasi Parameter	66
Tabel 4.7 Tabel Perbandingan nilai R-square dan MSE	79
Tabel 4.8 Analisis Varians model Spline Tiga Knot	80
Tabel 4.9 Uji Identik pada Residual	80
Tabel 4.10 Uji Statistik Durbin Watson	81

DAFTAR GAMBAR

		Halaman
Gambar 2.1	Spline <i>truncated</i> dengan tigatitik knot (Budiantara, 2011)	12
Gambar 4.1	<i>Scatter Plot</i> antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase jumlah status kawin (X_1)	56
Gambar 4.2	<i>Scatter Plot</i> antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Rata-rata usia kawin pertama (X_2)	56
Gambar 4.3	<i>Scatter Plot</i> antaraAngka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase CPR (X_3)	57
Gambar 4.4	<i>Scatter Plot</i> antaraAngka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase <i>unmet need</i> (X_4).	57
Gambar 4.5	<i>Scatter Plot</i> antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5).	58
Gambar 4.6	<i>Scatter Plot</i> antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan PDRB perkapita (X_6).	58
Gambar 4.7	Perbandingan hasil estimasi antara Regresi Campuran Spline dan Kernel, Regresi Spline, Regresi Kernel dan Regresi Linier Berganda	77
Gambar 4.8	Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada Regresi Campuran Spline dan Kernel	77
Gambar 4.9	Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada regresi Linier Berganda	78
Gambar 4.10	Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada Regresi Spline	78
Gambar 4.11	Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada Regresi Kernel	79

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis Regresi merupakan salah satu analisis dalam Statistika yang dipergunakan untuk mengestimasi pola hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respon. Analisis regresi dalam mengestimasi kurva regresi terdapat dua pendekatan, yaitu pendekatan regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Pendekatan regresi parametrik diasumsikan bentuk kurva regresi diketahui. Identifikasi awal pola hubungan dapat dilakukan dengan memanfaatkan pengalaman masa lalu atau menggunakan diagram pencar (scatter plot). Jika pola hubungan data membentuk pola linear maka digunakan pendekatan regresi parametrik linear, jika pola hubungan data membentuk pola kuadrat maka digunakan pendekatan regresi parametrik kuadratik (Budiantara, 2005).

Apabila tidak ada informasi apapun mengenai bentuk kurva regresi apakah berbentuk linier, kuadratik atau yang lainnya, maka pendekatan yang digunakan adalah regresi nonparametrik. Pendekatan regresi nonparametrik tidak tergantung pada asumsi bentuk kurva tertentu, sehingga memberikan fleksibilitas yang lebih tinggi, dimana data diharapkan menyesuaikan sesuai bentuk estimasi kurva regresi tanpa dipengaruhi oleh subyektifitas peneliti (Eubank, 1999). Dalam hal ini kurva regresi diasumsikan termuat dalam ruang fungsi tertentu (Eubank, 1999). Keterbatasan informasi, bentuk fungsi, dan tidak jelasnya pola hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor merupakan pertimbangan sehingga digunakan pendekatan regresi nonparametrik.

Terdapat banyak jenis estimator dalam model regresi nonparametrik, diantaranya kernel, spline, histogram, deret orthogonal, polinomial lokal, wavelet dan deret fourier. Diantara metode-metode pendekatan tersebut, regresi nonparametrik dengan pendekatan spline dan kernel merupakan metode yang sering digunakan. Spline merupakan salah satu model yang mempunyai model interpretasi statistik dan interpretasi visual sangat khusus dan sangat baik

(Budiantara, 2012). Estimator spline memiliki fleksibilitas yang tinggi (Eubank, 1999). Spline juga memiliki kemampuan yang sangat baik dalam menangani data yang perilakunya berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu (Eubank, 1999; Budiantara, 2012). Estimator kernel juga memiliki beberapa kelebihan, diantaranya estimator kernel memiliki kemampuan yang baik untuk memodelkan data yang tidak mempunyai pola tertentu, selain itu perhitungan matematisnya mudah (Hardle, 1990). Estimator kernel juga memiliki kecepatan kekonvergenan yang relatif lebih cepat dibandingkan dengan kurva regresi nonparametrik yang lain seperti polinomial lokal, deret fourier maupun spline (Hardle, 1990).

Regresi kernel merupakan teknik statistik nonparametrik untuk menaksir nilai ekspektasi bersyarat suatu variabel random. Nilai ekspektasi ini lazim dinotasikan $E(Y|X)$. Tujuan regresi kernel adalah mendapatkan hubungan nonlinier antara X dengan Y . Sementara itu, regresi spline adalah model polinomial yang tersegmen. Polinomial tersegmen memegang peranan penting dalam teori dan aplikasi statistika. Spline sangat tergantung pada titik knot. Titik knot merupakan titik perpaduan bersama dimana terjadi pola perubahan perilaku dari suatu fungsi pada selang yang berbeda.

Beberapa penelitian mengenai estimator kernel telah dilakukan oleh banyak peneliti seperti oleh Nadaraya (1964), Watson (1964), Hadijati, (2004), Okumura dan Naito (2006), Yao (2007), Budiantara dan Mulianah, (2007) serta Kayri dan Zirhlioglu (2009), Du, Parmeter dan Racine (2012), Aljuhani dan Al Turk (2014). Penelitian mengenai estimator Spline telah dilakukan oleh peneliti lain seperti Craven dan Wahba (1979), Wahba (1990), Eubank (1999), Budiantara (2005); Otok (2006); Budiantara (2009); Budiantara, Lestari dan Islamiyati (2010); Darmawi dan Otok (2014), Budiantara, Ratna, Zain dan Wibowo (2015). Sementara itu, penelitian tentang regresi campuran Spline dan Kernel telah dilakukan oleh Budiantara, Ratnasari, Ratna dan Zain, (2015); Rory (2016); Rismal (2016); Purnomo (2016); Syisliawati (2016) dan Hesikumasari (2016).

Kernel merupakan estimator yang pada awalnya banyak digunakan dalam regresi nonparametrik. Kelompok peneliti pertama yang meneliti kernel diawali oleh Nadaraya (1964) dan Watson (1964). Kemudian diikuti penelitian

lain dalam perkembangan regresi kernel, seperti Hadijati (2004) meneliti tentang estimasi kernel dengan error berkorelasi, dan Okumura dan Naito (2006) yang meneliti Metode smoothing kernel untuk regresi multinomial. Yao (2007) yang dalam penelitiannya telah menurunkan distribusi asimtotik dari distribusi kernel dengan menggunakan rata-rata terbobot untuk data longitudinal. Selain itu, Budiantara dan Mulianah (2007) meneliti tentang pemilihan bandwidth optimal dalam regresi Semiparametrik kernel, dan terdapat pula penelitian tentang estimator kernel untuk melihat hubungan antara tingkat ketergantungan internet dengan lama-nya penggunaan internet setiap hari di sekolah menengah oleh Kayri dan Zirhlioglu (2009). Du dkk (2012) meneliti tentang regresi kernel multivariabel prediktor dan beberapa kendala bentuknya. Peneliti lain, Aljuhani dan Al Turk (2014) yang melakukan penelitian modifikasi estimasi regresi kernel adaptif Nadaraya-Watson.

Spline pertama kali diperkenalkan oleh Whitaker pada tahun 1923 sebagai pendekatan pola data. Craven dan Wahba (1979) meneliti tentang data smoothing dengan fungsi Spline. Spline yang didasarkan pada suatu persoalan optimasi dikembangkan oleh Reinsc pada tahun 1967 (Wahba, 1990). Penelitian tentang fungsi Spline yang *smooth* diteliti oleh Eubank (1999). Sementara itu, Budiantara (2005) meneliti tentang penentuan titik-titik knots dalam regresi Spline. Pendekatan spline mempunyai suatu basis fungsi, yang biasa digunakan adalah spline *truncated* dan B-Spline. Spline *truncated* merupakan fungsi dimana terdapat perubahan pola perilaku kurva yang berbeda pada interval-interval yang berbeda. Kelebihan *spline truncated* adalah dapat menggambarkan perubahan pola perilaku dari fungsi pada sub interval tertentu. Kelebihan lain dari spline *truncated* pada penelitian Otok (2006) menunjukkan kurva spline *truncated* lebih baik dari *Multivariate Adaptive Regression Spline* (MARS) pada fungsi yang melibatkan satu variabel prediktor. Penelitian tentang pemodelan Spline dalam regresi nonparametrik dan semiparametrik dilakukan oleh Budiantara (2009). Budiantara dkk (2010) meneliti tentang estimator spline terbobot dalam regresi nonparametrik dan semiparametrik heteroskedastik untuk data longitudinal. Darmawi dan Otok (2014) dalam penelitiannya menyimpulkan nilai MSE pada kurva Spline

truncated lebih kecil dibanding dengan regresi linier pada semua fungsi, hal ini berarti bahwa kurva spline *truncated* lebih baik dibanding dengan regresi linier. Budiantara dkk (2015) Memodelkan Persentase Penduduk Miskin di Indonesia dengan menggunakan Pendekatan Regresi Nonparametrik Spline.

Penelitian mengenai regresi campuran nonparametrik spline dan kernel sebelumnya telah dilakukan oleh Budiartara dkk (2015). Selanjutnya Rory (2016) meneliti tentang estimator campuran spline dan multivariabel prediktor kernel menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Rismal (2016) meneliti tentang estimator campuran multivariabel prediktor spline dan multivariabel prediktor kernel menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Purnomo (2016) meneliti tentang estimator campuran spline dan kernel menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Sementara itu, Hesikumalasari (2016) meneliti tentang estimator campuran spline dan kernel dalam regresi semiparametrik. Penelitian mengenai interval kepercayaan regresi nonparametrik campuran spline dan kernel telah dilakukan oleh Syisliawati (2016).

Model-model pendekatan regresi nonparametrik yang dikembangkan oleh penelitian sebelumnya pada dasarnya terdapat dua asumsi yang mendasar pada modelnya, yaitu pola dari masing-masing prediktor dalam model regresi nonparametrik multivariabel dianggap mempunyai pola yang sama dan peneliti memaksakan menggunakan satu bentuk estimator model untuk setiap variabel prediktor. Dua asumsi yang digunakan dalam model regresi nonparametrik ini pada dasarnya hanya ada secara teoritis. Pada penelitian yang telah dilakukan, sering dijumpai kasus-kasus dimana terjadi pola data yang berbeda dari masing-masing variabel prediktor. Selain itu dengan hanya menggunakan satu bentuk estimator dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik multivariabel yang memiliki pola data variabel prediktor yang berbeda, berakibat estimator yang diperoleh tidak akan sesuai dan cenderung mempunyai error yang besar (Budiantara, Ratnasari, Ratna dan Zain, 2015). Berdasarkan hal tersebut, Budiantara dkk (2015) menyarankan penggunaan estimasi model kurva regresi yang sesuai dengan pola data. Dalam penelitian ini merujuk pada penggunaan

model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel untuk memodelkan Angka Fertilitas Total atau *Total Fertility Rate* (TFR) di Jawa Timur, karena berdasarkan karakteristik pola data, dihasilkan beberapa variabel prediktor tidak memiliki pola data dan sebagian lagi memiliki pola tertentu tetapi adanya perubahan perilaku pada sub-sub interval tertentu. Oleh karena itu, penggunaan regresi nonparametrik campuran spline dan kernel.

Masalah kependudukan merupakan salah satu permasalahan yang dihadapi hampir semua negara berkembang di dunia. *Fertilitas* merupakan salah satu komponen utama kependudukan selain kematian dan migrasi yang menyebabkan terjadinya perubahan penduduk. Istilah fertilitas adalah sama dengan kelahiran hidup, yaitu terlepasnya bayi dari rahim sorang perempuan dengan ada tanda-tanda kehidupan, misalnya bernafas, jantung berdenyut, berteriak, dan sebagainya. Jumlah penduduk yang banyak atau berlebihan tentu saja menyebabkan tidak meratanya kesejahteraan hidup penduduk itu sendiri. Untuk mengurangi laju pertumbuhan penduduk tentunya harus dilakukan berbagai tindakan, salah satunya adalah penurunan tingkat fertilitas. Hal ini sangat berpengaruh terhadap kesejahteraan penduduk yang merupakan tujuan penting yang ingin dicapai oleh setiap negara. Untuk mencapai tujuan tersebut pemerintah harus membuat kebijakan-kebijakan penting dan berusaha memenuhi sarana dan fasilitas yang menunjang kesejahteraan penduduk.

Disamping tujuan mencapai kesejahteraan masyarakat oleh pemerintah tersebut, tentu harus juga diikuti dengan peran serta masyarakat untuk mendukung dan ikut ambil bagian. Sehingga pengetahuan tentang kependudukan sangat penting diketahui oleh masyarakat luas untuk merangsang timbulnya tingkah laku yang bertanggung jawab terhadap masalah kependudukan. Dengan adanya kesadaran masyarakat dan perhatian untuk ikut serta dalam mewujudkan kesejahteraan penduduk maka pemerintah dan masyarakat secara bersama-sama berusaha menanggulangi masalah pertumbuhan penduduk misalnya dengan melaksanakan program Keluarga Berencana (KB).

Angka Fertilitas Total didefinisikan sebagai jumlah anak yang akan dipunyai seorang wanita selama masa reproduksinya per 1000 wanita. Terdapat

beberapa faktor yang mempengaruhi tingkat kelahiran, diantaranya adalah pasangan usia subur dan pendapatan perkapita penduduk. Akibat tingkat Angka Fertilitas Total yang tinggi maka pertambahan penduduk yang besar akan mempunyai dampak terhadap berbagai aspek kehidupan. Banyaknya anak yang dilahirkan sangat erat kaitannya terhadap beban rumah tangga. Semakin banyak jumlah anak, berarti semakin besar tanggungan kepala rumah tangga dalam memenuhi kebutuhan anggota rumah tangganya. Masalah kependudukan yang dihadapi Indonesia telah mendorong terjadinya perubahan paradigma kebijakan kependudukan secara mendasar di Indonesia

Berdasarkan data Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional (BKKBN), Angka Fertilitas Total penduduk Indonesia pada tahun 2010 terjadi peningkatan dari tahun 2000 yakni dari angka 2,3 menjadi 2,4. Sementara itu, laju pertumbuhan penduduk di Indonesia dalam satu tahun mengalami lonjakan sebesar 1,49 persen. Pemerintah melalui BKKBN bertekad untuk menurunkan LPP nasional dari 1,49 persen per tahun menjadi 1,38 per tahun guna menekan pertumbuhan penduduk Indonesia yang semakin tinggi. Demikian juga dengan Provinsi terpadat kedua di Indonesia, yakni Jawa Timur. Jawa Timur yang mengalami kenaikan Angka Fertilitas Total dari tahun 2000 sebesar 1,713 menuju 2,002 pada tahun 2010 dan laju pertambahan penduduk di Provinsi Jawa Timur sebesar 0,61 persen dalam setahun.

Data Angka Fertilitas Total dan masing-masing variabel prediktornya mempunyai pola yang tidak mengikuti pola tertentu (linier atau polinomial berderajat tertentu), sehingga pendekatan model regresi yang sesuai adalah model regresi nonparametrik. Karakteristik dari pola data yang sebagian tidak mempunyai pola data dan sebagian lagi memiliki pola tertentu tetapi adanya perubahan perilaku pada sub-sub interval tertentu, karena pada variabel Persentase jumlah status kawin, Rata-rata usia kawin pertama, Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*), Persentase *unmet need* dan Persentase penduduk berpendidikan tinggi mempunyai perilaku yang berubah-ubah pada interval tertentu sehingga dapat dimodelkan dengan regresi spline dan pada variabel PDRB perkapita tidak mempunyai pola yang jelas sehingga dapat

dimodelkan dengan regresi kernel, oleh karena itu metode campuran spline dan kernel digunakan untuk memodelkan pola data. Salah satu bagian penting dari inferensi statistik adalah pengujian hipotesis. Dalam penelitian ini akan dilakukan pengujian hipotesis campuran regresi spline *truncated* dan kernel pada data Angka Fertilitas Total di Jawa Timur tahun 2015.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang diperoleh rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara mendapatkan estimasi model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel?
2. Bagaimana penurunan pengujian hipotesis untuk parameter komponen spline dalam model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel?
3. Bagaimana mengaplikasikan uji hipotesis model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel pada Angka Fertilitas Total di Jawa Timur?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh estimasi model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel.
2. Memperoleh penurunan pengujian hipotesis untuk parameter komponen spline dalam model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel.
3. Mengaplikasikan uji hipotesis model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel pada kasus Angka Fertilitas Total di Jawa Timur

1.4 Manfaat Penelitian

1. Mengembangkan wawasan keilmuan dan pengetahuan tentang regresi nonparametrik spline *truncated*.

2. Mengembangkan wawasan keilmuan dan pengetahuan tentang regresi nonparametrik kernel.
3. Mengembangkan pengetahuan tentang pengujian hipotesis regresi nonparametrik campuran kernel dan spline.
4. Hasil penelitian diharapkan menjadi bahan masukan dalam menentukan variabel-variabel yang mempengaruhi Angka Fertilitas Total di Jawa Timur.

1.5 Batasan Penelitian

Mengacu perumusan masalah di atas, maka ruang lingkup dalam penelitian ini dibatasi pada beberapa hal, antara lain :

1. Model regresi nonparametrik yang digunakan adalah spline *truncated*.
2. Estimator kernel yang digunakan adalah estimator kernel Nadaraya dan Watson.
3. Pemilihan titik knot dan bandwidth optimal menggunakan metode GCV.
4. Dalam aplikasi digunakan spline *truncated* linear dengan satu, dua, dan tiga kombinasi knot.
5. Penurunan statistik uji dalam penelitian ini menggunakan metode *Likelihood Ratio Test* (LRT).

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi Parametrik

Analisis regresi merupakan suatu analisis statistika yang digunakan untuk memodelkan pola hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon. Jika variabel respon adalah y_i dan variabel prediktor adalah $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, maka pasangan data x_i, y_i akan membentuk model hubungan fungsional

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$$

di mana $f(x_i)$ adalah kurva regresi dan ε_i adalah error random yang diasumsikan identik, independen dan berdistribusi normal dengan mean nol dan varian σ^2 (Eubank, 1999).

Terdapat dua pendekatan dalam model regresi, yaitu regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Pemodelan regresi parametrik digunakan apabila kurva regresi data membentuk pola tertentu, seperti linier, kuadratik ataupun kubik. Model regresi parametrik dalam penggunaannya memerlukan informasi dari masa lalu atau sumber informasi lain yang tersedia yang dapat menggambarkan secara detail tentang data tersebut. Model regresi parametrik juga mempunyai asumsi bentuk kurva regresi harus diketahui. Sebaliknya, jika bentuk kurva regresi tidak diketahui, maka dilakukan pendekatan menggunakan regresi nonparametrik. Metode untuk mengestimasi parameter adalah metode *Least Square* atau *Maximum Likelihood* (Wahba, 1990). Pada umumnya, variabel respon y dapat dihubungkan dengan k variabel-variabel prediktor. Model regresi linear berganda dapat disajikan dalam bentuk (Montgomery & Hines, 1972)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Dimana y variabel respon, x_1, x_2, \dots, x_k sebagai variabel prediktor, ε_i merupakan error random independen berdistribusi normal dengan mean nol dan varians σ^2 dan parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ tidak diketahui. Estimasi regresi parametrik sangat efisien jika model yang diasumsikan benar, akan tetapi jika tidak benar

akan menyebabkan interpretasi data yang tidak sesuai dan mempunyai error yang besar.

Secara umum bentuk regresi parametrik linear berganda dengan k variabel prediktor pada persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagaimana persamaan (2.2)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

dimana

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Variabel respon \mathbf{y} adalah sebuah vektor ($n \times 1$) dari observasi-observasi respon, \mathbf{X} adalah sebuah matriks ($n \times (k+1)$) dari variabel-variabel prediktor, $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebuah vektor ($(k+1) \times 1$) dari koefisien-koefisien regresi dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah sebuah vektor ($n \times 1$) dari error random. Parameter $\boldsymbol{\beta}$ diestimasi dengan metode kuadrat terkecil yang meminimumkan $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Dengan menurunkan parsial $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dan menyamakan dengan nol, maka diperoleh estimator :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} = \frac{\partial((\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}))}{\partial(\boldsymbol{\beta})}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.3)$$

2.2 Regresi Nonparametrik Spline Truncated

Pendekatan regresi nonparametrik yang banyak digunakan adalah *splinetruncated*. *Splinetruncated* merupakan potongan-potongan polinomial yang memiliki sifat tersegmen dan kontinu. Salah satu kelebihan *splinetruncated* adalah mempunyai sifat fleksibilitas yang tinggikan cenderung mencari sendiri estimasi data kemanapun pola data tersebut bergerak. Kemampuan mengestimasi perilaku data ini ditunjukkan oleh fungsi *truncated* (potongan-potongan) yang melekat

pada estimator dan potongan-potongan tersebut yang disebut titik knot. Titik knot merupakan titik perpaduan bersama yang menunjukkan perubahan pola perilaku fungsi pada selang yang berbeda. Spline merupakan salah satu jenis *piecewise* polinomial, yaitu polinomial yang memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen ini memberikan fleksibilitas yang lebih baik dari polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara lebih efektif terhadap karakteristik lokal suatu fungsi atau data. Secara umum, fungsi spline *truncated* dengan derajat m dan titik-titik knot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ adalah suatu fungsi yang dapat ditulis dalam bentuk sebagaimana persamaan (2.4)

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

$$= \sum_{j=0}^m \theta_j x_i^j + \sum_{k=1}^r \phi_{k+m} (x_i - \lambda_k)_+^m + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

dengan,

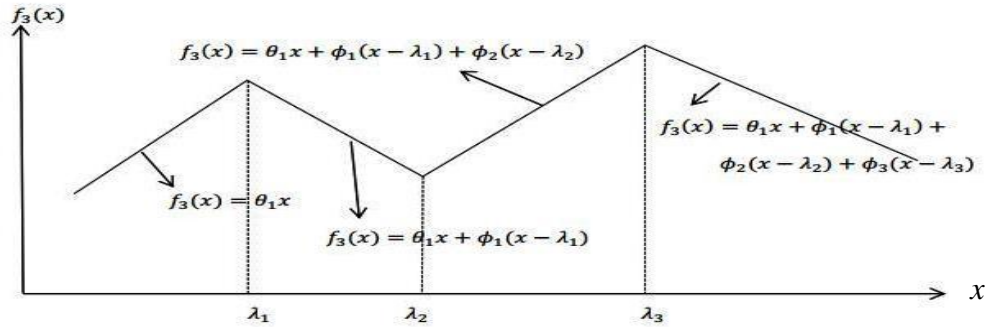
$$(x_i - \lambda_k)_+^m = \begin{cases} (x_i - \lambda_k)^m, & x_i \geq \lambda_k \\ 0 & , x_i < \lambda_k \end{cases}$$

Error random ε_i diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan variansi σ^2 . Sebagai salah satu ilustrasi sederhana diberikan spline linier *truncated* dengan tiga knot pada $x_1 = \lambda_1 \leq x_2 = \lambda_2 \leq x_3 = \lambda_3$ (Budiantara, 2011) diberikan oleh :

$$f_3(x) = \theta_1 x + \phi_1 (x - \lambda_1)_+^1 + \phi_2 (x - \lambda_2)_+^1 + \phi_3 (x - \lambda_3)_+^1$$

Fungsi Spline $f_3(x)$ dapat disajikan dalam bentuk (lihat gambar 2.1) :

$$f_3(x) = \begin{cases} \theta_1 x & , x < \lambda_1 \\ \theta_1 x + \phi_1 (x - \lambda_1)^1 & , \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \\ \theta_1 x + \phi_1 (x - \lambda_1)^1 + \phi_2 (x - \lambda_2)^1 & , \lambda_2 \leq x \leq \lambda_3 \\ \theta_1 x + \phi_1 (x - \lambda_1)^1 + \phi_2 (x - \lambda_2)^1 + \phi_3 (x - \lambda_3)^1 & , x \geq \lambda_3 \end{cases}$$



Gambar 2.1 Spline *truncated* dengan tiga titik knot (Budiantara, 2011)

Dalam regresi nonparametrik dengan pendekatan *spline truncated*, hal penting yang berperan dalam mendapatkan estimator *spline truncated* adalah pemilihan titik knot yang optimal. Salah satu metode yang sering digunakan dalam memilih titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Jika dibandingkan dengan metode lain, misalnya *Cross Validation* (CV) dan metode *Unbiased Risk* (UBR) ataupun *Generalized Maximum Likelihood* (GML), GCV secara teoritis memiliki sifat *optimal asymptotik*. Metode GCV juga memiliki kelebihan tidak memerlukan pengetahuan terhadap variansi populasi σ^2 serta metode GCV invariants terhadap transformasi. Metode GCV merupakan pengembangan dari CV (Wahba, 1990). Fungsi GCV untuk pemilihan titik knot optimal dapat ditunjukkan dalam persamaan (2.5)

$$GCV(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \frac{MSE(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)}{(n^{-1} \text{trace}[I - A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)])^2} \quad (2.5)$$

dengan

$$MSE(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2$$

2.3 Regresi Nonparametrik Kernel

Estimator kernel mempunyai kelebihan yaitu fleksibel, bentuk matematisnya mudah dan dapat mencapai tingkat kekonvergenan yang relative cepat. Kurva regresi $g(t_i)$ yang dihipotesis fungsi kernel, estimasi kurva regresi dapat disajikan dalam persamaan (2.6)

$$\hat{g}_\alpha(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_\alpha(t-t_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_\alpha(t-t_j)} \right] y_i = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha i}(t) y_i \quad (2.6)$$

dimana :

$$W_{\alpha i}(t) = \frac{K_\alpha(t-t_i)}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_\alpha(t-t_i)}; \quad K_\alpha(t-t_i) = \frac{1}{\alpha} K\left(\frac{t-t_i}{\alpha}\right)$$

Dengan K merupakan fungsi kernel. Menurut Hardle (1990), fungsi kernel K dapat berupa Kernel Gaussian:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) I_{[-\infty, \infty]}(u)$$

dimana $u_i = \frac{t-t_i}{\alpha}, i=1, 2, \dots, n$, α adalah *bandwidth*, t adalah variabel prediktor

dan t_i adalah nilai ke- i variabel prediktor. Pendekatan kernel tergantung pada *bandwidth* α , yang berfungsi untuk mengontrol *smoothness* dari kurva estimasi. Pemilihan *bandwidth* yang tepat merupakan hal yang sangat penting dalam regresi kernel (Hadijati, 2004). *Bandwidth* yang terlalu besar akan menghasilkan kurva estimasi yang sangat *smooth* dan menuju ke rata-rata dari variabel respon, sebaliknya bila *bandwidth* terlalu kecil akan menghasilkan kurva estimasi yang kurang *smooth* yaitu hasil estimasi akan menuju ke data.

Estimator kurva regresi (2.6) sangat tergantung pada dua hal, yaitu parameter *bandwidth* dan fungsi kernelnya (Budiantara, 2015), tetapi dari dua hal tersebut ternyata *bandwidth* lebih signifikan pengaruhnya terhadap estimator kernel dibanding fungsi kernel. Dalam kaitannya pemilihan *bandwidth* optimal, digunakan metode *Generalized Cross Validation* (GCV).

2.4 Estimator Campuran Spline dan Kernel

Budiantara, Ratnasari, Ratna dan Zain (2015) meneliti tentang model regresi nonparametrik aditif yang memiliki dua komponen variabel prediktor. Komponen prediktor pertama kurva regresinya dihipotesiskan menggunakan regresi spline, sedangkan komponen prediktor kedua kurva regresi dihipotesiskan dengan

fungsi kernel. Diberikan data berpasangan (x_i, t_i, y_i) data hubungan antar variabel prediktor x_i, t_i dan variabel respon y_i mengikuti model regresi nonparametrik :

$$y_i = \mu(x_i, t_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Bentuk kurva regresi diasumsikan tidak diketahui dan hanya diasumsikan *smooth* dalam arti kontinu dan differensiabel. Error random ε_i berdistribusi normal dengan mean nol dan $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$. Selanjutnya kurva regresi $\mu(x_i, t_i)$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$\mu(x_i, t_i) = f(x_i) + g(t_i)$$

dengan $f(x_i)$ dan $g(t_i)$ merupakan fungsi-fungsi yang *smooth*. Persoalan utama dalam estimator campuran kurva regresi nonparametrik adalah mendapatkan bentuk estimasi kurva regresi $\mu(x_i, t_i)$ yaitu :

$$\hat{\mu}_{\alpha, \lambda}(x_i, t_i) = \hat{f}_{\alpha, \lambda}(x_i) + \hat{g}_{\alpha}(t_i)$$

Parameter α merupakan parameter *bandwith* dan λ merupakan titik knot. Estimator campuran regresi spline dan kernel bisa didapatkan dengan cara kurva regresi $f(x_i)$ dihamperi dengan fungsi *splinetruncated* derajat m dan titik knot $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)^T$, sedangkan kurva regresi $g(t_i)$ dihamperi dengan fungsi kernel. Menurut Budiantara(2015), kurva regresi $f(x_i)$ yang diberikan persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi :

$$f = X_1\theta + X_2(\lambda)\phi$$

Selanjutnya didapat:

$$\hat{g}_{\alpha}(t) = D(\alpha)y$$

dengan demikian model regresi campuran spline dan kernel dapat disajikan menjadi :

$$\begin{aligned} y &= [X_1\theta + X_2(\lambda)\phi] + D(\alpha)y + \varepsilon \\ &= [X_1X_2(\lambda)] \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} + D(\alpha)y + \varepsilon \\ &= Z(\lambda)\beta + D(\alpha)y + \varepsilon \end{aligned}$$

Estimator parameter β dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) yang meminimumkan:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \|(I - D(\alpha))y\|^2 - 2\beta^T Z(\lambda)^T (I - D(\alpha))y + \beta^T Z(\lambda)^T Z(\lambda)\beta$$

Untuk mendapatkan estimator untuk β , dilakukan derivatif parsial terhadap β diperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= [(Z(\lambda))^T Z(\lambda)]^{-1} (Z(\lambda))^T (I - D(\alpha))y \\ &= C(\lambda, \alpha)y\end{aligned}$$

dimana :

$$C(x, \lambda) = [(Z(\lambda))^T Z(\lambda)]^{-1} (Z(\lambda))^T (I - D(\alpha))$$

Estimator spline diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\alpha, \lambda}(x, t) &= Z(\lambda)\hat{\beta}(\lambda, \alpha) \\ &= Z(\lambda) [(Z(\lambda))^T Z(\lambda)]^{-1} (Z(\lambda))^T (I - D(\alpha))y \\ &= A(\lambda, \alpha)y\alpha\end{aligned}$$

dengan matrik adalah :

$$A(\lambda, \alpha) = Z(\lambda) [(Z(\lambda))^T Z(\lambda)]^{-1} (Z(\lambda))^T (I - D(\alpha))$$

Selanjutnya didapat estimator campuran regresi spline dan kernel:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{\alpha, \lambda}(x, t) &= \hat{f}_{\alpha, \lambda}(x, t) + \hat{g}_{\alpha}(t) \\ &= A(\lambda, \alpha)y + D(\alpha)y \\ &= (A(\lambda, \alpha) + D(\alpha))y \\ &= B(\lambda, \alpha)y\end{aligned}$$

dimana matrik $B(\lambda, \alpha)$ adalah :

$$B(\lambda, \alpha)y = A(\lambda, \alpha) + D(\alpha)$$

Estimator campuran regresi Spline dan Kernel $\hat{\mu}_{\alpha, \lambda}(x, t)$ sangat bergantung kepada banyak dan letak titik knot $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)^T$ dan parameter *bandwidth* α . Untuk memperoleh estimator campuran regresi spline dan kernel yang terbaik perlu dilakukan pemilihan titik knot dan parameter *bandwidth* yang

optimal. Metode digunakan adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Fungsi GCV yang diberikan oleh Wahba (1990):

$$GCV(\lambda, \alpha) = \frac{n^{-1} \|\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha, \lambda}(x, t)\|^2}{\left(n^{-1} \text{trace}[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda, \alpha) - \mathbf{D}(\alpha)]\right)^2}$$

Titik knot optimal $\lambda_{opt} = (\lambda_{1(opt)}, \lambda_{2(opt)}, \dots, \lambda_{r(opt)})^T$ dan parameter *bandwidth* optimal α_{opt} diperoleh dari optimasi : $G(\lambda_{opt}, \alpha_{opt}) = \min_{\lambda, \alpha} \{G(\lambda, \alpha)\}$

2.5 Uji Hipotesis

Pengujian hipotesis merupakan suatu tata cara estimasi tentang parameter populasi melalui menguji kebenaran suatu hipotesa. Diberikan model regresi $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$. Untuk mengetahui apakah variabel-variabel x_1, x_2, \dots, x_k berpengaruh terhadap model dapat digunakan uji hipotesis. Uji hipotesis dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Likelihood Ratio Test*.

Prosedur uji hipotesis parameter adalah :

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.7)$$

Misalkan Ω adalah ruang parameter populasi, maka diperoleh fungsi likelihood :

$$L(\Omega)$$

Fungsi yang memaksimumkan $L(\Omega)$ adalah :

$$L(\hat{\Omega})$$

Misalkan ω adalah himpunan parameter di bawah H_0 , maka fungsi likelihoodnya adalah :

$$L(\omega)$$

Fungsi yang memaksimumkan $L(\omega)$ adalah :

$$L(\hat{\omega})$$

Statistik pengujian untuk hipotesis H_0 lawan H_1 diperoleh dari menyelesaikan rasio:

$$L_{ratio} = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

Hipotesis H_0 akan ditolak jika dan hanya jika $\lambda < \lambda_0$ dengan λ_0 adalah suatu konstanta.

2.6 Teorema Dasar Terkait Aljabar

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam proses mendapatkan estimator model regresi nonparametrik kernel dan *splinetruncated* linier multivariabel berikut ini.

Teorema 2.6.1 (Rencher dan Schaalje, 2007)

Pada matriks \mathbf{A} dan \mathbf{B} , maka berlaku sifat – sifat sebagai berikut :

- a. Jika matriks \mathbf{A} simetris, maka $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
- b. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- c. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Teorema selanjutnya berkaitan dengan penurunan matriks dan vektor.

Teorema 2.6.2 (Rencher dan Schaalje, 2007)

Pada vektor \mathbf{a} dan \mathbf{x} , dimana $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$, $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ memuat konstanta, dengan ini berlaku

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

Teorema 2.6.3 (Rencher dan Schaalje, 2007)

Apabila vektor \mathbf{x} dan \mathbf{A} merupakan suatu matriks simetri, maka

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$$

Teorema 2.6.4 (Rencher dan Schaalje 2007)

Jika $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ dan \mathbf{A} matrik simetris dengan rank r , maka $\mathbf{yA} \mathbf{y} / \sigma^2 \sim \chi^2(r, \boldsymbol{\muA} \boldsymbol{\mu} / 2\sigma^2)$ jika dan hanya jika \mathbf{A} adalah *idempotent*.

Teorema 2.6.5 (Rencher dan Schaalje, 2007)

Jika $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ maka $\mathbf{yA} \mathbf{y}$ dan $\mathbf{yB} \mathbf{y}$ adalah *independent* jika dan hanya jika $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ (atau ekuivalen, $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$)

2.7 Koefisien Determinasi (R^2)

Koefisien determinasi (R^2) merupakan ukuran ketelitian atau ketepatan model regresi, atau besarnya kontribusi x terhadap perubahan y. Semakin tinggi nilai R^2 maka model akan semakin baik. Rumus koefisien determinasi diberikan oleh:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{(\hat{Y} - \bar{Y})'(\hat{Y} - \bar{Y})}{(Y - \bar{Y})'(Y - \bar{Y})}$$

2.8 Angka Fertilitas Total

2.8.1 Pengertian Angka Fertilitas Total

Angka Fertilitas Total atau Total Fertility Rate (TFR) didefinisikan sebagai jumlah kelahiran hidup laki-laki dan perempuan tiap 1000 perempuan yang hidup hingga akhir masa reproduksinya (BKKBN, 2015). Angka Fertilitas Total didefinisikan sebagai jumlah kelahiran hidup laki-laki dan perempuan tiap 1.000 penduduk yang hidup hingga akhir masa reproduksinya dengan catatan :

- Tidak ada seorang perempuan yang meninggal sebelum mengakhiri masa reproduksinya.
- Tingkat TFR menurut usia tidak berubah pada periode waktu tertentu (Mantra, 2006).

Menurut Mantra (2006), tingkat Angka Fertilitas Total menggambarkan riwayat Angka Fertilitas Total dari sejumlah perempuan selama masa reproduksinya. Hal ini sesuai dengan riwayat kematian dari tabel kematian penampang lintang (*cross sectional life table*). Dalam praktek, tingkat Angka Fertilitas Total dikerjakan dengan menjumlahkan tingkat Angka Fertilitas Total perempuan menurut usia, apabila usia tersebut berjenjang lima tahunan, dengan asumsi bahwa Angka Fertilitas Total menurut usia tunggal sama dengan rata-rata tingkat Angka Fertilitas Total kelompok usia lima tahunan.

Rumus Angka Fertilitas Total adalah sebagai berikut:

$$TFR = 5 \sum ASFR_i$$

TFR = Total Fertility Rate

$ASFR_i$ = Tingkat TFR menurut usia ke-1 dari kelompok berjenjang 5 tahunan.

Dengan rumus :

$$ASFR_i = \frac{B_i}{P_{fi}} \times k$$

B_i = Jumlah kelahiran bayi pada kelompok usia i

P_{fi} = Jumlah perempuan kelompok usia i pada pertengahan tahun

k = Angka konstanta = 1.000

2.9 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Angka Fertilitas Total

2.9.1 Persentase Jumlah Status Kawin

Perkawinan merupakan salah satu variabel yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total, yang secara tidak langsung mempengaruhi pertumbuhan penduduk. Perkawinan merupakan perubahan dari status perkawinan lain menjadi status “kawin”, misalnya perubahan dari status “belum kawin” menjadi status “kawin”(Balitbang, 2010).

Menurut Balitbang (2010) yang mengutip Undang-Undang (UU) Perkawinan No 1 Tahun 1974, perkawinan adalah ikatan batin antara seorang pria dengan seorang wanita sebagai suami istri dengan tujuan membentuk keluarga (rumah tangga) yang bahagia dan kekal berdasarkan Ketuhanan Yang Maha Esa”. Batasan untuk kawin yang ditetapkan oleh UU ini adalah minimal berusia 19 tahun bagi laki-laki boleh kawin sedangkan bagi perempuan adalah minimal usia 16 tahun.

Perkawinan bukan merupakan komponen yang langsung mempengaruhi penambahan penduduk akan tetapi mempunyai pengaruh cukup besar terhadap Angka Fertilitas Total yang merupakan salah satu unsur pertumbuhan penduduk. Faktor utama yang mempengaruhi kemungkinan seorang wanita untuk hamil selain penggunaan kontrasepsi adalah antara lain perkawinan. Perkawinan merupakan awal dari kemungkinan untuk hamil bagi seorang wanita. Dengan demikian, status kawin termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total.

2.9.2 Rata-rata Usia Kawin Pertama

Usia kawin memegang peranan yang penting dalam Angka Fertilitas Total, adalah bahwa peningkatan usia kawin wanita berarti memperpendek masa subur. Pada setiap kelompok masyarakat proses bereproduksi atau memiliki keturunan dilegalkan melalui institusi perkawinan walaupun tidak dipungkiri bahwa terdapat hubungan kelamin diluar pernikahan, baik yang menghasilkan kelahiran maupun tidak. Pada kelompok masyarakat yang tidak memiliki program pencegahan kelahiran seperti program keluarga berencana, maka penundaan usia kawin pertama merupakan salah satu cara untuk menghambat kelahiran (Apriyanti, 2014).

Usia kawin pertama adalah umur pada saat wanita melakukan perkawinan secara hukum dan biologis yang pertama kali. Usia perkawinan dalam suatu pernikahan berarti umur terjadinya hubungan kelamin antara individu pria dan wanita yang terkait dalam suatu lembaga perkawinan dengan berbagi ketentuan mengenai hak dan kewajiban dari masing-masing individu. Pada masyarakat yang sedang berkembang, usia perkawinan pertama cenderung muda sehingga mempunyai nilai Angka Fertilitas Total yang tinggi. Dengan kata lain semakin cepat usia kawin pertama, semakin besar kemungkinan mempunyai anak (Singarimbun, 1996).

Usia perkawinan pertama mempunyai pengaruh cukup besar terhadap Angka Fertilitas Total yang merupakan salah satu komponen pertumbuhan penduduk. Pada dasarnya ada dua macam bentuk perkawinan. Pertama, menunjukkan perubahan status dari belum kawin menjadi berstatus kawin. Kedua, perubahan dari status cerai menjadi status kawin. Dalam kaitan dengan penelitian ini, definisi yang digunakan adalah yang pertama, yaitu perubahan dari status belum kawin menjadi kawin (Apriyanti, 2014).

Menurut BKKBN (2011) yang mengutip pendapat Mosley dan Chen (1984), usia kawin pertama merupakan salah satu indikator demografi yang penting. Umumnya wanita yang menikah pada usia muda mempunyai masa reproduksi yang lebih panjang, yang dapat berakibat pada angka kelahiran yang lebih tinggi dibanding wanita yang menikah pada usia lebih tua. Dengan

demikian, usia kawin pertama termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total

2.9.3 CPR (*Contraception Prevalence Rate*)

Keberhasilan program Keluarga Berencana di suatu wilayah dapat diukur dengan melihat tingkat pemakaian kontrasepsi (prevalensi kontrasepsi). Dengan demikian dapat dipahami betapa pentingnya informasi tentang pemakaian kontrasepsi, yang dapat digunakan juga untuk memperkirakan penurunan angka Angka Fertilitas Total akibat dari pemakaian kontrasepsi tersebut.

CPR (*Contraception Prevalence Rate*) adalah angka yang menunjukkan banyaknya Pasangan Usia Subur (PUS) yang sedang memakai kontrasepsi pada saat pencacahan. CPR adalah persen cakupan peserta KB aktif dibandingkan dengan jumlah pasangan usia subur di suatu wilayah kerja pada kurun waktu tertentu. Persentase wanita usia reproduksi yang menggunakan metode kontrasepsi pada titik tertentu dalam waktu, hampir selalu dilaporkan bagi perempuan menikah atau dalam hubungan seksual. Umumnya, ukuran mencakup semua metode kontrasepsi (modern dan tradisional).

Data SDKI 2012 menunjukkan tren CPR di Indonesia sejak 1991-2012 cenderung meningkat, sementara tren Angka Fertilitas Total cenderung menurun. Tren ini menggambarkan bahwa meningkatnya cakupan wanita usia 15-49 tahun yang melakukan KB sejalan dengan menurunnya Angka Fertilitas Total nasional. Bila dibandingkan dengan target RPJMN 2014, CPR telah melampaui target (60,1%) dengan capaian 61,9%, namun Angka Fertilitas Total belum mencapai target (2,36) dengan angka tahun 2012 sebesar 2,6 (Depkes, 2014).

Kualitas pelayanan kontrasepsi dapat meningkatkan cakupan pengguna keluarga berencana, enam komponen tersebut yaitu: 1) pilihan metode; 2) informasi yang diberikan kepada klien; 3) kompetensi provider; 4) tempat konsultasi; 5) tindak lanjut dan keberlangsungan pelayanan; dan 6) pelayanan yang tepat. Bentuk layanan keluarga berencana yang diberikan oleh provider bukan sekedar menyediakan alat kontrasepsi, tetapi memperhatikan kebutuhan sosial dan kesehatan calon akseptor. Keberhasilan klien dalam mengambil

keputusan pemilihan kontrasepsi adalah mengerti tentang keefektifan metode, mengetahui kelebihan dan kelemahan metode, cara pencegahan terhadap penyakit menular seksual, mengerti pemakaian metode dan kapan untuk kembali, serta tanda dan cara mengatasi efek samping. Dengan demikian, CPR termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total.

2.9.4 *Unmet need*

Menurut SDKI (2012) *unmet need* adalah kebutuhan Keluarga Berencana yang tidak terpenuhi. Kebutuhan keluarga berencana yang belum terpenuhi (*unmet need*) didefinisikan sebagai kesenjangan antara niat wanita usia reproduksi dengan perilaku penggunaan kontrasepsi. Beberapa wanita yang menikah dan tidak menikah ingin menghindari kehamilan tetapi tidak menggunakan kontrasepsi. Definisi *unmet need* menurut *Demographic Health Survey* (DHS) adalah proporsi wanita usia subur yang menikah atau hidup bersama (seksual aktif) yang tidak ingin punya anak lagi atau yang ingin menjarangkan kelahiran berikutnya dalam jangka waktu minimal 2 tahun tetapi tidak menggunakan alat atau cara kontrasepsi.

Unmet need merupakan pelayanan layanan kontrasepsi/keluarga berencana yang berkaitan dengan *demand* keluarga berencana. *Demand* KB adalah niat atau motivasi individu atau pasangan untuk mengontrol TFR dimasa yang akan datang. *Demand* KB terbagi dalam 3 kategori yaitu keinginan untuk menunda kelahiran anak pertama, keinginan untuk menjarangkan kehamilan dan keinginan untuk mengakhiri kelahiran. Untuk menunda, mengatur jarak dan membatasi kelahiran ditentukan oleh penilaian ekonomi dan sosial yang memiliki kekuatan untuk motivasi pengendalian kesuburan. Menurut Westoff (2006) perempuan yang tidak terpenuhi pelayanan keluarga berencana dan tidak berniat untuk menggunakan kontrasepsi di masa depan adalah populasi yang menjadi perhatian khusus dari program keluarga berencana. Kelompok ini lebih membutuhkan motivasi dan lebih banyak ketersediaan kontrasepsi.

BPS memberikan batasan bahwa *unmet need* merupakan persentase wanita

kawin yang tidak ingin mempunyai anak lagi atau ingin menjarangkan kelahiran anak berikutnya, akan tetapi tidak memakai alat atau cara kontrasepsi. Kelompok *unmet need* mencakup wanita hamil yang kehamilannya tidak diinginkan, dan wanita yang tidak hamil atau belum haid setelah melahirkan dan tidak memakai kontrasepsi tetapi ingin menunggu dua tahun atau lebih sebelum kelahiran berikutnya. Wanita yang belum memutuskan apakah ingin anak lagi tapi belum tahu kapan juga termasuk dalam kelompok *unmet need*. Wanita yang hamil akibat kegagalan metode kontrasepsi, wanita yang mengalami *infecund* yaitu mereka telah menikah lima tahun atau lebih tetapi tidak pernah melahirkan, menopause dan histerektomi bukan termasuk dalam kelompok *unmet need*.

Usia pernikahan yang terlalu muda, pendidikan wanita yang rendah, jarak ke layanan dan diskriminasi gender terhadap pemilihan jenis kelamin anak adalah karakteristik demografi yang menentukan tingginya kebutuhan KB yang tidak terpenuhi. Terdapat perbedaan karakteristik demografi dalam *unmet need* terkait pelayanan keluarga berencana untuk pembatasan dan penjarangan kelahiran. Pembatasan kelahiran lebih tinggi pada wanita dengan usia lebih dari 35 tahun, tidak memiliki pendidikan formal dan paritas lebih dari empat, sedangkan untuk penjarangan kelahiran lebih tinggi pada wanita usia dibawah 25 tahun, pendidikan menengah atau tinggi dan paritas rendah. Dengan demikian, *unmet need* termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total.

2.9.5 Persentase Penduduk Berpendidikan Tinggi

Dunia pendidikan di Indonesia masih menghadapi permasalahan, salah satunya adalah keluhan mengenai sarana dan prasarana pendidikan yang kurang memadai dan tenaga pengajar yang kurang berkualitas. Untuk itu berbagai cara dilakukan oleh pemerintah diantaranya dengan mengembangkan kurikulum, sehingga diharapkan dapat menciptakan lulusan yang berkualitas yang dapat meningkatkan mutu sumber daya manusia.

Program atau kebijaksanaan pemerintah dalam bidang pendidikan pada hakekatnya bertujuan untuk memberi kesempatan seluas-luasnya kepada

masyarakat untuk dapat sekolah. Dengan demikian, tingkat pendidikan masyarakat diharapkan akan lebih baik terutama tingkat melek huruf khususnya pada penduduk usia sekolah (7-24 tahun). Masih rendahnya kemampuan pemerintah dan masyarakat selalu menjadi kendala dalam dunia pendidikan. Realita ini senantiasa banyak ditemui di sekeliling kita, dimana banyak sarana pendidikan yang sangat tidak layak dan juga banyak anak-anak usia sekolah seharusnya belajar, namun sudah harus bekerja untuk menambah penghasilan keluarga.

Kebijaksanaan lain sebagai upaya untuk meningkatkan tingkat pendidikan masyarakat adalah melalui program diluar pendidikan formal, diantaranya melalui sekolah-sekolah program jarak jauh. Agar pendidikan dapat dimiliki oleh seluruh lapisan masyarakat sesuai dengan kemampuan masing-masing individu, maka pendidikan adalah tanggung jawab keluarga, masyarakat dan pemerintah. Pada program pembangunan pendidikan nasional yang dilakukan saat ini telah pula mempertimbangkan kesepakatan-kesepakatan internasional seperti Pendidikan Untuk Semua (*Education For All*), Konvensi Hak Anak (*Convention on the Right of Child*) dan *Millenium Development Goals* (MDGs) yang secara jelas menekankan pentingnya pendidikan sebagai salah satu cara penanggulangan kemiskinan, peningkatan keadilan sosial dan lainnya.

Pentingnya pendidikan tercermin dalam Undang-Undang Dasar 1945, yang mengamanatkan bahwa salah satu tujuan Negara Indonesia adalah mnencerdaskan kehidupan bangsa. Demikian pula dijelaskan dalam Batang tubuh UUD 1945 pasal 28 dan pasal 31 yang mengamanatkan bahwa setiap warga Negara berhak mendapat pendidikan. Oleh sebab itu peningkatan akses masyarakat terhadap pendidikan yang lebih berkualitas merupakan amanat yang harus dilaksanakan bangsa ini karena pendidikan merupakan sarana untuk membentuk manusia terampil dan produktif sehingga dapat mempercepat peningkatan kesejahteraan masyarakat.

Menurut Apriyanti (2014), pendidikan merupakan salah satu faktor yang sangat penting dan mempunyai kaitan dengan pengetahuan dan pandangan dalam pembatasan jumlah anak. Dengan pendidikan yang semakin tinggi ditempuh

seseorang, berarti menunda perkawinan yang dapat mempengaruhi jumlah anak yang dilahirkan. Pendidikan menurunkan kegunaan ekonomi yang diharapkan dari anak dan menyebabkan jumlah anak yang diharapkan juga berkurang. Semakin tinggi pendidikan seseorang dengan sendirinya semakin luas pengetahuan dan pola pikirnya dan diduga semakin besar pula kemungkinan untuk mempertimbangkan dalam pembatasan jumlah anggota keluarga atau jumlah anak. Orang berpendidikan atau pandai baca-tulis lebih terbuka pada pikiran-pikiran baru dan lebih banyak mempunyai kesempatan untuk bertemu muka dengan “penyalur perubahan” seperti para perencana bidang kesehatan atau penasehat program keluarga berencana. Pendidikan yang makan waktu lama kemungkinan besar akan menyebabkan perkawinan tertunda dan membuka pilihan antara bekerja dan membesarkan anak. Pendidikan yang lebih tinggi mungkin pula berarti kehidupan ekonomi yang lebih terjamin, dan ini biasanya berarti keluarga yang lebih kecil.

Penjelasan di atas menunjukkan bahwa terdapat kaitan yang sangat erat antara kaitan pendidikan wanita dan besar keluarga. Para orang tua akan tergerak untuk mementingkan kualitas dari pada kuantitas anak, atau memberi kesempatan kepada istri dan ibu untuk bekerja demi menunjang pemeliharaan anak. Dengan demikian, salah satu cara untuk mendorong para keluarga agar menginginkan sedikit anak adalah dengan memperbesar kesempatan di bidang pendidikan dan membuka lapangan-lapangan pekerjaan berpenghasilan tinggi kepada kaum wanita. Dengan demikian, persentase penduduk berpendidikan tinggi termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total Mantra (2009).

2.9.6 PDRB perkapita

Penelitian mengenai teori dan model fertilitas sudah banyak dilakukan oleh para ahli terutama ahli bidang sosial dan kependudukan serta bidang ekonomi. Hal ini dikarenakan semakin kompleksnya permasalahan sosial dan ekonomi yang timbul akibat pertambahan penduduk, terutama yang disebabkan oleh faktor kelahiran.

Pada sebagian negara maju, memperhitungkan faktor-faktor lain dalam memiliki anak antaranya adalah pengaruh memiliki anak terhadap pola pembelanjaan rumah tangga, alokasi waktu orang tua, jumlah pendapatan yang harus dibelanjakan untuk anak-anak mereka dan jumlah tambahan pendapatan suatu keluarga yang memiliki anak, jika dibandingkan dengan keluarga yang tidak memiliki anak (Koorman, 2001). Di seluruh wilayah Asia, Angka Fertilitas Total cenderung lebih tinggi pada penduduk kurang mampu. Pada negara berkembang yang mayoritas masyarakatnya kurang mampu, pendidikannya rendah, bekerja pada sektor tradisional serta tingkat kesehatan yang masih rendah, memandang anak dari sudut kepentingan sosial ekonomi, konsep anak dipandang sebagai suatu investasi ekonomi yang nanti diharapkan akan dapat membantu keluarga baik dalam bentuk tenaga kerja cuma-cuma keluarga dan keuangan orang tua dimasa lanjut usia (Michael, 2000).

Dalam analisis ekonomi Angka Fertilitas Total dibahas mengapa permintaan akan anak berkurang bila pendapatan meningkat. Jika pendapatan dan pendidikan meningkat maka semakin banyak waktu (khususnya waktu ibu) yang digunakan untuk merawat anak. Jadi, anak menjadi lebih berkualitas, sehingga hal ini dapat mengurangi angka kelahiran (Mundiharno, 1997). Dalam hal ini, anak dilihat dari 2 segi yaitu segi kegunaannya (*utility*) dan biaya (*cost*). Kegunaannya ialah memberikan kepuasan, dapat memberikan balas jasa ekonomi atau membantu dalam kegiatan berproduksi serta merupakan sumber yang dapat menghidupi orang tua di masa depan. Sedangkan pengeluaran untuk membesarkan anak adalah biaya dari mempunyai anak tersebut.

Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) perkapita merupakan salah satu indikator untuk mengukur tingkat kesejahteraan penduduk di suatu wilayah. Meningkatkan PDRB perkapita tidak hanya dengan meningkatkan PDRB tetapi juga dengan menekan jumlah penduduk. Di sisi lain kelahiran merupakan salah satu faktor yang dapat menambah jumlah penduduk sehingga menekan jumlah kelahiran merupakan salah satu langkah untuk meningkatkan kesejahteraan penduduk (Azantaro, 2015). Dengan demikian PDRB perkapita pada

kabupaten/kota termasuk salah satu dari faktor-faktor yang mempengaruhi tinggi rendahnya Angka Fertilitas Total.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder tentang Angka Fertilitas Total dengan unit observasi sebanyak 38 kabupaten/kota di provinsi Jawa Timur tahun 2015 yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Timur dan Perwakilan Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional Provinsi Jawa Timur.

1.2 Variabel Penelitian

Variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini adalah variabel yang diduga akan berpengaruh terhadap Angka Fertilitas Total. Adapun variabel respon dan variabel-variabel prediktor diberikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

Variabel	Variabel	Skala Data
Y	Angka Fertilitas Total	Rasio
x_1	Persentase jumlah status kawin	Rasio
x_2	Rata-rata usia kawin pertama	Rasio
x_3	Persentase CPR (Contraception Prevalence Rate)	Rasio
x_4	Persentase <i>Unmet need</i>	Rasio
x_5	Persentase penduduk berpendidikan tinggi	Ordinal
x_6	PDRB perkapita	Rasio

Adapun definisi operasional dari variabel-variabel penelitian diatas menurut definisi istilah yang diterbitkan oleh BPS dan beberapa literatur adalah sebagai berikut :

1. Angka Fertilitas Total adalah jumlah kelahiran hidup laki-laki dan perempuan tiap 1000 perempuan yang hidup hingga akhir masa reproduksinya
2. Persentase jumlah status kawin adalah persentase dari jumlah ikatan perkawinan secara hukum yang dihitung pada suatu kabupaten/kota.
3. Rata-rata usia kawin pertama adalah rata-rata usia pada saat wanita melakukan perkawinan secara hukum dan biologis yang pertama kali pada suatu kabupaten/kota.
4. Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*) adalah angka persentase yang menunjukkan banyaknya pasangan usia subur yang sedang memakai kontrasepsi pada saat pencacahan pada suatu kabupaten/kota
5. Persentase *Unmet need* adalah angka persentase yang menunjukkan kebutuhan keluarga berencana yang tidak terpenuhi atau proporsi wanita usia subur yang menikah atau hidup bersama (seksual aktif) yang tidak ingin mempunyai anak lagi atau yang ingin menjarangkan kelahiran berikutnya dalam jangka waktu minimal 2 tahun tetapi tidak menggunakan alat atau cara kontrasepsi pada suatu kabupaten/kota.
6. Persentase penduduk berpendidikan tinggi adalah persentase penduduk pada suatu kabupaten/kota mempunyai pendidikan D4/S1/S2/S3 yang ditamatkan oleh penduduk 10 tahun keatas.
7. PDRB perkapita adalah kondisi ekonomi penduduk yang diukur berdasarkan pendapatan perkapita perhari pada suatu kabupaten/kota.

3.3 Tahapan Penelitian

Tujuan pertama dari penelitian ini adalah untuk menurunkan pengujian hipotesis komponen spline pada regresi nonparametrik campuran spline dan kernel. Untuk menyelesaikan tujuan pertama, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendapatkan pengembangan estimasi model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel dengan langkah-langkah:
 - a. Diberikan data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}, t_i, y_i)$

- b. Asumsikan variabel prediktor $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}$ dan t_i dan y_i mengikuti model regresi nonparametrik multivariabel aditif :

$$y_i = \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}, t_i) + \varepsilon_i$$

$$= \sum_{l=1}^q f_l(x_{li}) + g(t_i) + \varepsilon_i$$

dimana y_i merupakan variabel respon, $\sum_{l=1}^q f_l(x_l)$ merupakan komponen variabel prediktor yang didekati fungsi spline *truncated*, $g(t)$ merupakan variabel prediktor yang didekati dengan fungsi kernel dan error ε_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ saling independen.

- c. Menyajikan model estimasi campuran regresi spline linier multivariabel dan kernel pada regresi nonparametrik tersebut dalam bentuk matrik:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}(\alpha)\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- d. Mendapatkan estimasi campuran regresi spline *truncated* dan kernel pada regresi nonparametrik menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS), dan diperoleh

$$\hat{\mu}(x_i, t_i) = \sum_{l=1}^q \hat{f}_l(x_{li}) + \hat{g}_h(t_{hi})$$

2. Merancang pengujian hipotesis parameter komponen spline pada model regresi nonparametrik, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Menuliskan komponen spline :

$$\sum_{l=1}^q f_l(x_l)$$

dalam bentuk matriks :

$$\sum_{l=1}^q f_l(x_l) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

dengan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan parameter-parameter komponen spline.

- b. Merumuskan pengujian hipotesis untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$, dengan:

$$\beta = \{\theta_0, \theta_{11}, \dots, \theta_{1q}, \phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(r+m)q}\}$$

sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit terdapat satu } \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

- c. Menentukan ruang parameter di bawah populasi Ω
- d. Menentukan fungsi likelihood di bawah ruang Ω sebagai berikut :

$$L(\Omega)$$

- e. Memaksimumkan fungsi likelihood di bawah ruang Ω , yaitu :

$$L(\widehat{\Omega})$$

- f. Menentukan ruang parameter di bawah H_0 yaitu ω
- g. Mencari fungsi likelihood di bawah ruang ω , sebagai berikut :

$$L(\omega)$$

- h. Memaksimumkan fungsi likelihood di bawah ruang ω , yaitu :

$$L(\widehat{\omega})$$

- i. Membuat rasio Likelihood :

$$L_{\text{ratio}} = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}$$

- j. Mendapatkan Statistik Test
- k. Menentukan daerah penolakan hipotesis H_0 melalui $\lambda < c$ dengan c suatu konstanta

Tujuan kedua dari penelitian ini adalah mengaplikasikan estimasi parameter dan pengujian hipotesis parameter pada model regresi nonparametrik campuran spline *truncated* dan kernel terhadap data Angka Fertilitas Total di Provinsi Jawa Timur. Untuk menyelesaikan tujuan kedua, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membuat scatter plot antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor.
2. Menentukan variabel-variabel prediktor komponen spline dan komponen kernel.

3. Memodelkan data menggunakan estimasi campuran spline dan kernel dengan berbagai knot (satu knot, dua knot dan tiga knot).
4. Memilih titik knot dan bandwitdh optimal dengan metode GCV
5. Menetapkan model terbaik dari nilai GCV minimum.
6. Berdasarkan model yang diperoleh, langkah selanjutnya adalah menguji signifikansi parameter model
7. Melakukan pemeriksaan asumsi residual
8. Menghitung nilai koefisien determinasi (R^2) dari data.
9. Membuat kesimpulan dari model yang terbentuk.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Bentuk Model Regresi Campuran Kernel dan Spline

Berdasarkan tujuan penelitian pertama, pada bahasan ini akan dilakukan evaluasi hasil estimasi kurva regresi campuran kernel dan spline. Kajian mengenai regresi nonparametrik campuran kernel dan spline pada data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}, t_i, y_i)$ dengan diasumsikan hubungan antar variabel prediktor $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}, t_i$ dan variabel respon y_i mengikuti model regresi nonparametrik :

$$\begin{aligned} y_i &= \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}, t_i) + \varepsilon_i \\ &= \sum_{l=1}^q f_l(x_{li}) + g(t_i) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Bentuk kurva regresi $\mu(\mathbf{x}_i, t_i)$ pada persamaan (4.1) diasumsikan tidak diketahui dan hanya diasumsikan bahwa kurva tersebut *smooth* dalam arti kontinyu dan *differensiabel*. Error random ε_i berdistribusi normal dengan $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Kurva regresi $\mu(\mathbf{x}_i, t_i)$ diasumsikan bersifat aditif, sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}_i, t_i) &= f(x_{1i}) + f(x_{2i}) + \dots + f(x_{qi}) + g(t_i) \\ &= \sum_{l=1}^q f_l(x_{li}) + g(t_i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bentuk pola hubungan variabel respon y_i dengan masing-masing variabel prediktor x_i diasumsikan berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu, sedangkan bentuk pola hubungan variabel respon y_i dengan variabel t_i diasumsikan tidak diketahui. Dengan $i = 1, 2, \dots, n$ secara teori $\sum_{l=1}^q f_l(x_{li})$ merupakan komponen variabel prediktor yang didekati kurva regresi spline dengan jumlah variabel sebanyak $l = 1, 2, \dots, q$. $g(t_i)$ merupakan komponen variabel prediktor dengan kurva regresi kernel.

Komponen kurva regresi spline $f(x_i)$ pada persamaan (4.2) didefinisikan oleh :

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \theta_0 + \theta_1 x_i + \dots + \theta_m x_i^m + \phi_{(1+m)} (x_i - \lambda_1)_+^m + \dots + \phi_{(r+m)} (x_i - \lambda_r)_+^m \\ &= \sum_{j=0}^m \theta_j x_i^j + \sum_{k=1}^r \phi_{k+m} (x_i - \lambda_k)_+^m, \end{aligned}$$

dengan

$$(x_i - \lambda_k)_+^m = \begin{cases} (x_i - \lambda_k)^m, & x_i \geq \lambda_k \\ 0, & x_i < \lambda_k \end{cases}$$

Parameter-parameter $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q$ dan $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ merupakan parameter-parameter yang tidak diketahui, sedangkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ merupakan titik-titik knot. Komponen kurva regresi kernel $g(t_i)$ didefinisikan oleh :

$$\hat{g}_{r\alpha_r}(t_{ri}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha_r i}(t_r) y_i,$$

dimana :

$$W_{\alpha_r i}(t_r) = \frac{K_{\alpha_r}(t_r - t_{ri})}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_{\alpha_r}(t_r - t_{ri})}; \quad K_{\alpha_r}(t_r - t_{ri}) = \frac{1}{\alpha_r} K\left(\frac{t_r - t_{ri}}{\alpha_r}\right).$$

K_{α} merupakan fungsi kernel yang dalam studi ini menggunakan fungsi kernel Nadaraya dan Watson

4.2 Estimasi Kurva Regresi Campuran Kernel dan Spline

Sejumlah q variabel prediktor, kurva regresinya dihipotesiskan dengan regresi spline truncated linier dengan titik knot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ maka persamaan ditunjukkan dengan model berikut :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_q) = \sum_{l=1}^q \left(\sum_{j=0}^m \theta_{jl} x_l^j + \sum_{k=1}^r \phi_{(k+m)l} (x_l - \lambda_{kl})_+^m \right)$$

sehingga regresi splinelinier masing-masing variabel prediktor adalah :

$$f_1(x_1) = \theta_{01} + \theta_{11} x_1 + \dots + \theta_{m1} x_1^m + \phi_{(1+m)1} (x_1 - \lambda_{11})_+^m +$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{(2+m)1} (x_1 - \lambda_{21})_+^m + \dots + \phi_{(r+m)1} (x_1 - \lambda_{r1})_+^m \\
f_2(x_2) &= \theta_{02} + \theta_{12}x_2 + \dots + \theta_{m2}x_2^m + \phi_{(1+m)2} (x_2 - \lambda_{12})_+^m + \\
& \phi_{(2+m)2} (x_2 - \lambda_{22})_+^m + \dots + \phi_{(r+m)2} (x_2 - \lambda_{r2})_+^m \\
& \bullet \\
& \bullet \\
& \bullet \\
f_q(x_q) &= \theta_{0q} + \theta_{1q}x_q + \dots + \theta_{mq}x_q^m + \phi_{(1+m)q} (x_q - \lambda_{1q})_+^m + \\
& \phi_{(2+m)q} (x_q - \lambda_{2q})_+^m + \dots + \phi_{(r+m)q} (x_q - \lambda_{rq})_+^m
\end{aligned}$$

Persamaan Spline linier r knot dapat disajikan dalam bentuk matriks :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}_{n \times 1} &= \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{q1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{q2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{qn} \end{bmatrix}_{n \times (1+q)} \begin{bmatrix} \theta_{01} \\ \theta_{11} \\ \vdots \\ \theta_{mq}^m \end{bmatrix}_{(1+q) \times 1} + \\
& \begin{bmatrix} (x_{11} - \lambda_{11})_+^m & \cdots & (x_{11} - \lambda_{r1})_+^m \\ (x_{12} - \lambda_{11})_+^m & \cdots & (x_{12} - \lambda_{r1})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{1n} - \lambda_{11})_+^m & \cdots & (x_{1n} - \lambda_{r1})_+^m \end{bmatrix}_{n \times r} \begin{bmatrix} \phi_{(1+m)1} \\ \vdots \\ \phi_{(r+m)1} \end{bmatrix}_{r \times 1} + \\
& \begin{bmatrix} (x_{21} - \lambda_{12})_+^m & \cdots & (x_{21} - \lambda_{r2})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{2n} - \lambda_{12})_+^m & \cdots & (x_{2n} - \lambda_{r2})_+^m \end{bmatrix}_{n \times r} \begin{bmatrix} \phi_{(1+m)2} \\ \vdots \\ \phi_{(r+m)2} \end{bmatrix}_{r \times 1} + \dots + \\
& \begin{bmatrix} (x_{q1} - \lambda_{1q})_+^m & \cdots & (x_{q1} - \lambda_{rq})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{qn} - \lambda_{1q})_+^m & \cdots & (x_{qn} - \lambda_{rq})_+^m \end{bmatrix}_{n \times r} \begin{bmatrix} \phi_{(1+m)q} \\ \vdots \\ \phi_{(r+m)q} \end{bmatrix}_{r \times 1}
\end{aligned}$$

Model matriks di atas dapat disajikan dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_0 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{X}_1(\lambda_1) \boldsymbol{\phi}_1 + \mathbf{X}_2(\lambda_2) \boldsymbol{\phi}_2 + \dots + \mathbf{X}_q(\lambda_q) \boldsymbol{\phi}_q, \quad (4.3)$$

Dapat dituliskan dalam bentuk matrik :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{X}_q(\lambda_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(\alpha)\boldsymbol{\beta} \quad (4.4)$$

dimana :

$$\mathbf{Z}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{X}_q(\lambda_q) \end{bmatrix} \text{ dan, } \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.2), untuk regresi kernel $g(t_i)$ diberikan fungsi Kernel dengan bentuk :

$$\hat{g}_\alpha(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha i}(t) y_i, \quad (4.5)$$

dimana :

$$W_{\alpha i}(t) = \frac{K_\alpha(t-t_i)}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_\alpha(t-t_i)}; \quad K_\alpha(t-t_i) = \frac{1}{\alpha} K\left(\frac{t-t_i}{\alpha}\right).$$

Dari persamaan fungsi kernel diatas, berlaku untuk setiap $t = t_1, t = t_2, \dots, t = t_n$ maka :

$$\begin{bmatrix} \hat{g}_\alpha(t_1) \\ \hat{g}_\alpha(t_2) \\ \vdots \\ \hat{g}_\alpha(t_n) \end{bmatrix}_{nx1} = \begin{bmatrix} n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha i}(t_1) y_i \\ n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha i}(t_2) y_i \\ \vdots \\ n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{\alpha i}(t_n) y_i \end{bmatrix}_{nx1} = \begin{bmatrix} n^{-1} W_{\alpha 1}(t_1) y_1 + \cdots + n^{-1} W_{\alpha n}(t_1) y_n \\ n^{-1} W_{\alpha 1}(t_2) y_1 + \cdots + n^{-1} W_{\alpha n}(t_2) y_n \\ \vdots \\ n^{-1} W_{\alpha 1}(t_n) y_1 + \cdots + n^{-1} W_{\alpha n}(t_n) y_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} n^{-1}W_{\alpha 1}(t_1) & n^{-1}W_{\alpha 2}(t_1) & \cdots & n^{-1}W_{\alpha n}(t_1) \\ n^{-1}W_{\alpha 1}(t_2) & n^{-1}W_{\alpha 2}(t_2) & \cdots & n^{-1}W_{\alpha n}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{-1}W_{\alpha 1}(t_n) & n^{-1}W_{\alpha 2}(t_n) & \cdots & n^{-1}W_{\alpha n}(t_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \\
&= \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.4) dan (4.6) maka model regresi campuran spline dan kernel pada persamaan (4.2), diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \sum_{l=1}^q \mathbf{f}_l(x_l) + g_\alpha(t) + \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Estimator parameter $\boldsymbol{\beta}$ dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) dari persamaan (4.7) diatas yang menghasilkan persamaan :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} - \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y} \\
&= \mathbf{y} - \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Selanjutnya jumlah kuadrat error dengan menggunakan teorema 2.6.1 bisa didapatkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = Q(\boldsymbol{\beta}) \\
&= ((\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta})^T ((\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta}) \\
&= \left(\mathbf{y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))^T - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T \right) ((\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta}) \\
&= \|(\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y}\|^2 - \mathbf{y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))^T \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} + \\
&\quad \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} \\
&= \|(\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y}\|^2 - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} + \\
&\quad \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T \mathbf{Z}(\lambda) \boldsymbol{\beta} \\
&= \|(\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y}\|^2 - 2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\lambda)^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} +
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\beta} \quad (4.9)$$

Untuk mendapatkan estimator dari parameter $\boldsymbol{\beta}$, berdasar pada penggunaan Teorema 2.6.2 dan 2.6.3 dilakukan derivatif parsial dari persamaan (4.9) $Q(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \left(\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} \right\|^2 - 2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda})^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\beta} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= -2 (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} + 2 (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \hat{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Apabila persamaan (4.10) disamakan dengan nol, maka akan diperoleh persamaan:

$$(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} = 0,$$

selanjutnya Persamaan dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y},$$

sehingga estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ diberikan oleh:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \right]^{-1} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y}. \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat diringkas menjadi bentuk persamaan :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) \mathbf{y}, \quad (4.12)$$

dimana :

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) = \left[(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \right]^{-1} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)).$$

Sehingga didapatkan estimator kurva spline untuk $\sum_{i=1}^q f_i(x_i) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\beta}$ diberikan

oleh persamaan :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \hat{f}_i(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) \\ &= \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \left[(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \right]^{-1} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sehingga :

$$\sum_{j=1}^q f_j(x_{ji}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) \mathbf{y}, \quad (4.14)$$

dengan matrik A adalah :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \left[(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \right]^{-1} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}))^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))$$

Kemudian dari persamaan (4.6) menunjukkan estimator persamaan kernel :

$$\hat{g}(t) = \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y},$$

sehingga didapatkan estimator campuran regresi spline linier dan kernel :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\mathbf{x}_i, t_i) &= \sum_{j=1}^q \hat{f}_j(\mathbf{x}_{ji}) + \hat{g}(t_i) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) \mathbf{y} + \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) + \mathbf{D}(\alpha)) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

dimana matrik **B** adalah :

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) + \mathbf{D}(\alpha).$$

Estimator campuran regresi Spline dan Kernel $\hat{\mu}(\mathbf{x}_i, t_i)$ sangat bergantung kepada banyak dan letak titik knot $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)^T$ dan parameter *bandwidth* α . Untuk memperoleh estimator campuran Kernel dan regresi Spline *truncated* linier multivariabel yang terbaik perlu dilakukan pemilihan titik knot dan parameter *bandwidth* yang optimal. Metode yang biasa digunakan adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Fungsi GCV oleh Wahba (1990) adalah :

$$GCV(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) = \frac{n^{-1} \|\mathbf{y} - \hat{\mu}_{\alpha, \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_i, t_i)\|^2}{\left(n^{-1} \text{trace}[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}, \alpha) - \mathbf{D}(\alpha)] \right)^2}. \quad (4.16)$$

Titik knot optimal $\boldsymbol{\lambda}_{opt} = (\lambda_{1(opt)}, \lambda_{2(opt)}, \dots, \lambda_{r(opt)})^T$ dan parameter *bandwidth* optimal α_{opt} diperoleh dari optimasi :

$$G(\boldsymbol{\lambda}_{opt}, \alpha_{opt}) = \underset{\boldsymbol{\lambda}, \alpha}{\text{Min}} \{G(\boldsymbol{\lambda}, \alpha)\}. \quad (4.17)$$

Titik knot dan parameter *bandwith* optimal diperoleh dari nilai GCV terkecil.

4.3 Pengujian Hipotesis

Diberikan model regresi nonparametrik campuran spline dan kernel dalam bentuk matriks:

$$\begin{aligned}
 y_i &= \sum_{j=1}^q f_j(x_{ji}) + \sum_{r=1}^p g_r(t_{ri}) + \varepsilon_i, \sim N(0, \sigma^2) \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{Z}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}(\alpha)\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon} \\
 (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))\mathbf{y} &= \mathbf{Z}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\
 \mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))^{-1} \mathbf{Z}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &= \mathbf{T}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Untuk mengetahui apakah parameter $\boldsymbol{\beta}$ berpengaruh terhadap model maka dapat dilakukan uji hipotesis dengan menggunakan metode Likelihood ratio Test (LRT) (Srivastava. 1994)

Prosedur uji hipotesis untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit terdapat satu } \beta_i \neq 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, p$$

Untuk menurunkan uji hipotesis H_0 lawan H_1 dapat menggunakan metode LRT. Perhatikan model regresi campuran spline dan kernel, dengan ε_i berdistribusi independen identik $N(0, \sigma^2)$.

$$y_i = \sum_{j=1}^q f_j(x_{ji}) + \sum_{r=1}^p g_r(t_{ri}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i = \mu(x_i, t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan

$$\mu(x_i, t_i) = \sum_{j=1}^q f_j(x_{ji}) + \sum_{r=1}^p g_r(t_{ri})$$

Karena $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ maka $y_i \sim N(\mu(x_i, t_i), \sigma^2)$ fungsi *likelihood* diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu(x_i, t_i))^2\right) \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu(x_i, t_i))^2\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta})\right)
\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ dan $\boldsymbol{\beta} = (\theta_0, \theta_{11}, \dots, \theta_{1q}, \phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(r+m)q})'$

Langkah selanjutnya adalah memperhatikan ruang-ruang parameter:

Di bawah H , yaitu ruang $\Omega = \{\boldsymbol{\beta} = (\theta_0, \theta_{11}, \dots, \theta_{1q}, \phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(r+m)q}), \sigma_\Omega^2\}$

Di bawah H_0 , yaitu ruang $\omega = \{(\boldsymbol{\beta} = \theta_0, \theta_{11}, \dots, \theta_{1q}, \phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(r+m)q}, \sigma_\omega^2 \mid \boldsymbol{\beta}_\omega = 0)\}$

Pertama diperhatikan ruang Ω

Fungsilikelihood diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2) &= (2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)\right) \\
&= (2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}' - \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}') (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)\right) \\
&= (2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega - \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y}) + \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega\right) \\
&= (2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - (\boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y})' - \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega)\right) \\
\text{Log } L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2) &= \log\left((2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega)\right)\right) \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\Omega^2) - \frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega) \\
\frac{\partial L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2)}{\partial \boldsymbol{\beta}_\Omega} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_\Omega} \left[-\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\Omega^2) - \frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega) \right] \\
&= 0 - \frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (0 - 2\mathbf{T}'\mathbf{y} + 2\mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\Omega) = 0
\end{aligned}$$

$$-2\mathbf{T}'\mathbf{y} + 2\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega = 0$$

$$2\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega = 2\mathbf{T}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega = \mathbf{T}'\mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega = (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} \quad 4.19$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2)}{\partial \sigma_\Omega^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_\Omega^2} \left[-\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\Omega^2) - \frac{1}{2\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\Omega'\mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega'\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega) \right]$$

$$= -\frac{n}{2} \left(\frac{2\pi}{2\pi\sigma_\Omega^2} \right) + \frac{1}{2\sigma_\Omega^4} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)$$

$$= -\frac{n}{2\sigma_\Omega^2} + \frac{1}{2\sigma_\Omega^4} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)$$

$$= -n + \frac{1}{\sigma_\Omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega) = 0$$

$$-n\sigma_\Omega^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega) = 0$$

$$n\sigma_\Omega^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)$$

$$\hat{\sigma}_\Omega^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)}{n}$$

Akibatnya

$$\underset{\Omega}{Max} L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2) = (2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}_\Omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega) \right)$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)}{2 \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)}{n}} \right)$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

Selanjutnya diperhatikan ruang ω

Fungsilikelihood diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\omega^2) &= (2\pi\sigma_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)\right) \\
&= (2\pi\sigma_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}' - \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}') (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)\right) \\
&= (2\pi\sigma_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y}) + \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\omega\right) \\
&= (2\pi\sigma_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - (\boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y})' - \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\omega)\right) \\
\text{Log } L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\omega^2) &= \log\left((2\pi\sigma_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\omega)\right)\right) \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\omega^2) - \frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\omega) \\
\frac{\partial L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\omega^2)}{\partial \sigma_\omega^2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\omega^2} \left[-\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\omega^2) - \frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\omega' \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_\omega) \right] \\
&= -\frac{n}{2} \left(\frac{2\pi}{2\pi\sigma_\omega^2} \right) + \frac{1}{2\sigma_\omega^4} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega) \\
&= -\frac{n}{2\sigma_\omega^2} + \frac{1}{2\sigma_\omega^4} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega) \\
&= -n + \frac{1}{\sigma_\omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega) = 0 \\
&\quad -n\sigma_\omega^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega) = 0 \\
n\sigma_\omega^2 &= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega) \\
\hat{\sigma}_\omega^2 &= \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\omega)}{n}
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\text{Max}_\omega L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\omega^2) = (2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}_\omega^2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)}{2 \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)}{n}} \right) \\
&= (2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh *Ratio Likelihood* :

$$\begin{aligned}
L_{ratio} &= \frac{\underset{\omega}{Max} L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\omega^2)}{\underset{\Omega}{Max} L(\boldsymbol{\beta}_\omega, \sigma_\Omega^2)} \\
&= \frac{(2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{(\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}}{(\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}}} \\
&= \left(\frac{\hat{\sigma}_\omega^2}{\hat{\sigma}_\Omega^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)}{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\frac{n}{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega)}}{\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega)}{n}} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{A}} \right)^{\frac{n}{2}} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh *Ratio Likelihood* pada persamaan (4.20). Selanjutnya persamaan (4.20) di atas akan dijabarkan seperti di bawah ini:

Dengan memperhatikan hipotesis awal :

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit terdapat satu } \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Dengan memperhatikan multiplier Lagrange di mana $\beta = (\theta_0, \theta_{11}, \dots, \theta_{1q}, \phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(r+m)q})'$, maka derivatif terhadap γ dan β_ω diberikan oleh :

$$S(\beta_\omega, \gamma) = A(\beta_\omega) + 2\gamma'(\beta_\omega) \quad 4.21$$

Di mana

$$A(\beta_\omega) = (y - T\beta_\omega)'(y - T\beta_\omega) \quad 4.22$$

Dengan konstrain β_ω dan $2\gamma'$ adalah vektor multiplier Lagrange.

Sehingga persamaan (4.22) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A(\beta_\omega) &= y'y - y'T\beta_\omega - \beta_\omega'T'y + \beta_\omega'T'T\beta_\omega \\ &= y'y - 2\beta_\omega'T'y + \beta_\omega'T'T\beta_\omega \end{aligned} \quad 4.23$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.23) ke dalam persamaan (4.21), didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$S(\beta_\omega, \gamma) = y'y - 2\beta_\omega'T'y + \beta_\omega'T'T\beta_\omega + 2\gamma'(\beta_\omega) \quad 4.24$$

Jika persamaan (4.24) diturunkan terhadap β_ω menghasilkan persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_\omega} S(\beta_\omega, \gamma) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta_\omega} (y'y - 2\beta_\omega'T'y + \beta_\omega'T'T\beta_\omega + 2\gamma'(\beta_\omega)) &= 0 \\ 2(T'T)^{-1}\beta_\omega - 2T'y + 2\gamma &= 0 \\ \hat{\beta}_\omega &= (T'T)^{-1}T'y - (T'T)^{-1}\gamma \\ &= \hat{\beta}_\Omega - (T'T)^{-1}\gamma \end{aligned} \quad 4.25$$

kemudian dilanjutkan penurunan terhadap γ menghasilkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \gamma} S(\beta_\omega, \gamma) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \gamma} (y'y - 2\beta_\omega' T'y + \beta_\omega' T'T\beta_\omega + 2\gamma'(\beta_\omega)) &= 0 \\
2\beta_\omega &= 0 \\
\beta_\omega &= 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dengan menstubsitusikan persamaan (4.26) ke dalam (4.25) akan mendapatkan nilai γ , yaitu

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_\omega \\
0 &= \hat{\beta}_\Omega - (T'T)^{-1} \gamma \\
(T'T)^{-1} \gamma &= \hat{\beta}_\Omega \\
\gamma &= (T'T)^{-1} \hat{\beta}_\Omega
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.24) akan menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_\omega &= \hat{\beta}_\Omega - (T'T)^{-1} \gamma \\
&= \hat{\beta}_\Omega - (T'T)^{-1} (T'T)^{-1} \hat{\beta}_\Omega
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega = (T'T)^{-1} (T'T)^{-1} \hat{\beta}_\Omega \tag{4.28}$$

Selanjutnya persamaan (4.28) akan disubsitusikan pada persamaaan (4.22) dan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A &= (y - T\hat{\beta}_\omega)'(y - T\hat{\beta}_\omega) \\
&= (y - T\hat{\beta}_\Omega + T\hat{\beta}_\Omega - T\hat{\beta}_\omega)'(y - T\hat{\beta}_\Omega + T\hat{\beta}_\Omega - T\hat{\beta}_\omega) \\
&= (y - T\hat{\beta}_\Omega + T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega))'(y - T\hat{\beta}_\Omega + T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)) \\
&= ((y - T\hat{\beta}_\Omega)' + (\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)'T')(y - T\hat{\beta}_\Omega + T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)) \\
&= (y - T\hat{\beta}_\Omega)'(y - T\hat{\beta}_\Omega) + (y - T\hat{\beta}_\Omega)'T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega) + \\
&\quad (\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)'T'(y - T\hat{\beta}_\Omega) + (\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)'T'T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega) \\
&= (y - T\hat{\beta}_\Omega)'(y - T\hat{\beta}_\Omega) + (y - T[(T'T)^{-1}T'y])'T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega) + \\
&\quad (\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)'T'(y - T[(T'T)^{-1}T'y]) + (\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)'T'T(\hat{\beta}_\Omega - \hat{\beta}_\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) + (\mathbf{y}' - \mathbf{y}'\mathbf{T}[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'])\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) + \\
&\quad (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'(\mathbf{y} - \mathbf{T}[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y}]) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) \\
&= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) + (\mathbf{y}'\mathbf{T} - \mathbf{y}'\mathbf{T}[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}]) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) + \\
&\quad (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'(\mathbf{T}'\mathbf{y} - \mathbf{T}'\mathbf{T}[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y}]) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) \\
&= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) + (\mathbf{y}'\mathbf{T} - \mathbf{y}'\mathbf{T}) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) + \\
&\quad (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'(\mathbf{T}'\mathbf{y} - \mathbf{T}'\mathbf{y}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) \\
&= \left((\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) \right) \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N} + \mathbf{M}$$

Selanjutnya akan dijabarkan persamaan \mathbf{M} dengan mensubstitusikan persamaan (4.28) ke dalam (4.29)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega})'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega}) \right) \\
&= \left[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} \right]' \mathbf{T}'\mathbf{T} \left[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} \right] \\
&= \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}' \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right] \mathbf{T}'\mathbf{T} \left[(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} \right] \\
&= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}' \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.29) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left((\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}' \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} \right) \\
&= \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1 \tag{4.30}
\end{aligned}$$

di mana:

$$\mathbf{Q}_1 = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}' \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega} \tag{4.31}$$

$$\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\Omega}) \tag{4.32}$$

sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (4.30) ke dalam persamaan (4.20) maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
L_{ratio} &= \left(\frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{A}} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} \right)^{-\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2}} \right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Berdasarkan persamaan(4.33) maka dapat dinyatakan bahwa statistik uji yang dapat disimbolkan sebagai **F** dari hipotesis $H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$ lawan $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$ adalah:

$$F = \frac{Q_1/d_1}{Q_2/d_2} \tag{4.34}$$

➤ Mendapatkan Distribusi Statistik Uji

Berdasarkan Teorema 2.6.4 pada Rencher dan Schaalje (2007) menyatakan bahwa Jika $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ dan \mathbf{A} matriks simetris dengan rank r , maka $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}/\sigma^2 \sim \chi^2(r, \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}/2\sigma^2)$ jika dan hanya jika jika \mathbf{A} adalah *idempotent*.

Langkah pertama adalah menjabarkan \mathbf{Q}_1 pada persamaan (4.30) dengan mensubstitusikan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Omega$ pada persamaan (4.19) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 &= \boldsymbol{\beta}'_\Omega \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} \boldsymbol{\beta}_\Omega \\
&= \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{y} \right)' \left((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa \mathbf{A} adalah *idempoten*, yaitu $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^2 = \left(\mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{y} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y})(\mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa matriks \mathbf{A} adalah *idempotent*.

Sehingga berdasarkan Teorema 5.5 dapat dinyatakan bahwa

$$\mathbf{Q}_1/\sigma^2 \sim \chi^2(r_1, \mu\mathbf{A}\mu/2\sigma^2)$$

di mana

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = r_1 = 1 + (r + m)q$$

dan

$$\frac{\mu\mathbf{A}\mu}{2\sigma^2} = \frac{(\mathbf{T}\beta)' \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{T}\beta}{2\sigma^2} \quad 4.36$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.27) ke dalam persamaan (4.36) maka didapatkan:

$$\frac{\mu\mathbf{A}\mu}{2\sigma^2} = 0$$

Sehingga

$$\mathbf{Q}_1/\sigma^2 \sim \chi^2(r_1)$$

Langkah kedua yaitu menjabarkan \mathbf{Q}_2 pada persamaan (4.32) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\beta_\Omega)'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\beta_\Omega) \\
&= (\mathbf{y}' - \beta_\Omega' \mathbf{T}')(\mathbf{y} - \mathbf{T}\beta_\Omega) \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{T}\beta_\Omega - \beta_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \beta_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{T}\beta_\Omega \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\beta_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \beta_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{T}\beta_\Omega
\end{aligned} \quad 4.37$$

Dengan mensubstitusikan $\hat{\beta}_\Omega$ pada persamaan (4.19) ke dalam persamaan (4.37) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2 &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{y} + \hat{\beta}_\Omega' \mathbf{T}'\mathbf{T}\hat{\beta}_\Omega \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y})' \mathbf{T}'\mathbf{y} + ((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y})' \mathbf{T}'\mathbf{T}((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}((\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}']\mathbf{y} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.39}$$

Dari persamaan (4.38) dan (4.39) dapat dinyatakan bahwa

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks \mathbf{A} adalah *idempotent* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}')^2 \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}')(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}') \\
&= \mathbf{I} - 2\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' + \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' \\
&= \mathbf{I} - 2\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' + \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' \\
&= \mathbf{A} \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.40) terbukti bahwa matriks \mathbf{A} adalah matriks *idempotent*.

Sehingga berdasarkan teorema 5.5 dapat dinyatakan bahwa

$$\mathbf{Q}_2/\sigma^2 \sim \chi^2(r_2, \mu\mathbf{A}\mu/2\sigma^2)$$

di mana

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = r_2 = n - (1 + (r + m)q) - 1$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\mathbf{A}\mu}{2\sigma^2} &= \frac{(\mathbf{T}\beta)'[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}']\mathbf{T}\beta}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\beta'\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta - \beta'\mathbf{T}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\beta'\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta - \beta'\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta}{2\sigma^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathbf{Q}_2/\sigma^2 \sim \chi^2(r_2)$$

Langkah selanjutnya adalah membuktikan bahwa \mathbf{Q}_1 dan \mathbf{Q}_2 *independent*. Dimana berdasarkan Teorema 2.6.5 pada Rencher dan Schaalje (2007) menyatakan bahwa Jika $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ maka \mathbf{yA} dan \mathbf{yB} adalah *independent* jika dan hanya jika $\mathbf{AB} = 0$ (atau ekuivalen, $\mathbf{BA} = 0$)

Sesuai dengan persamaan (4.34) dan (4.36) maka didapatkan

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'$$

dan

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}') \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' - \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{AB} = 0$, maka dapat dikatakan bahwa \mathbf{Q}_1 dan \mathbf{Q}_2 *independen*

Dari penjabaran di atas didapatkan hasil sebagai berikut:

1. $\mathbf{Q}_1/\sigma^2 \sim \chi^2(1 + (m + r)q)$
2. $\mathbf{Q}_2/\sigma^2 \sim \chi^2(n - (1 + (m + r)q))$
3. \mathbf{Q}_1 dan \mathbf{Q}_2 *independen*

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{\mathbf{Q}_1 / \sigma^2}{1 + (m + r)q}}{\frac{\mathbf{Q}_2 / \sigma^2}{n - (1 + (m + r)q)}} \\ &= \frac{\mathbf{Q}_1 / (1 + (m + r)q)}{\mathbf{Q}_2 / (n - (1 + (m + r)q))} \sim F_{(1 + (m + r)q), (n - (1 + (m + r)q))} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} \sim F_{(d_1, d_2)}$$

Daerah penolakan $L_{ratio} < k$ di mana $L_{ratio} < k < 1$ dan k adalah konstanta tertentu sehingga

$$L_{ratio} < k$$

$$\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} < k$$

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2}} \right)^{\frac{n}{2}} < k$$

$$\left(1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} \right)^{\frac{n}{2}} < k$$

$$1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} > k^{\frac{2}{n}}$$

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} > k^{\frac{2}{n}} - 1$$

$$\frac{\mathbf{Q}_1 / d_1}{\mathbf{Q}_2 / d_2} > k^{\frac{2}{n}} - 1$$

$$F > \frac{d_2}{d_1} \left(k^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$$

$$F > k^* \text{ di mana } k^* = \frac{d_2}{d_1} \left(k^{\frac{2}{n}} - 1 \right).$$

Daerah kritis untuk uji $H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$ lawan $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$ adalah

$$c = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); F > k^*\}$$

Jika diberikan taraf signifikansi α maka

$$\alpha = P(\text{menolak } H_0 \mid H_0 \text{ benar})$$

$$\alpha = P(F > k^* \mid \boldsymbol{\beta} = 0) \text{ dengan } F = \left(\frac{\mathbf{Q}_1 / d_1}{\mathbf{Q}_2 / d_2} \right) \sim F(d_1, d_2)$$

4.4 Aplikasi Model Campuran Spline dan Kernel pada Angka Fertilitas Total di Jawa Timur

Unit observasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah 38 kabuapten/kota yang ada di Provinsi Jawa Timur. Variabel respon yang digunakan adalah Angka Fertilitas Total (Y), sedangkan variabel prediktor adalah Persentase jumlah status kawin (X_1), Rata-rata usia kawin pertama (X_2), Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*) (X_3), Persentase *unmet need* (X_4), Persentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5), dan PDRB perkapita(X_6).

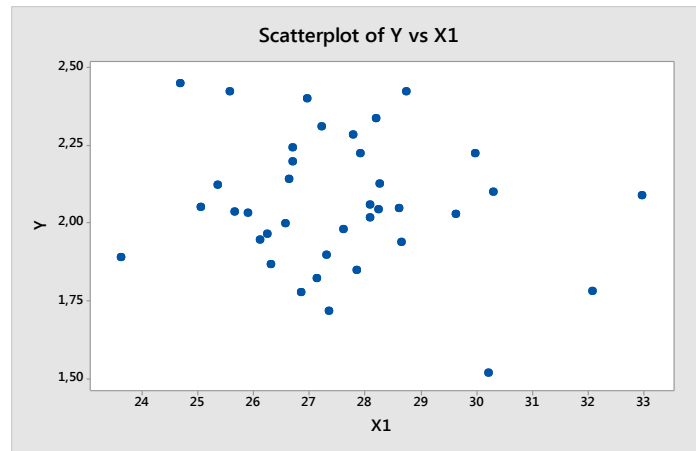
4.4.1 Analisis Deskriptif

Sebelum proses permodelan Regresi Campuran Kernel dan Spline *Truncated* Multivariabel pada data Angka Fertilitas Total di Provinsi Jawa Timur, perlu dilihat statistik deskriptif dari data masing-masing variabel seperti ditunjukkan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor

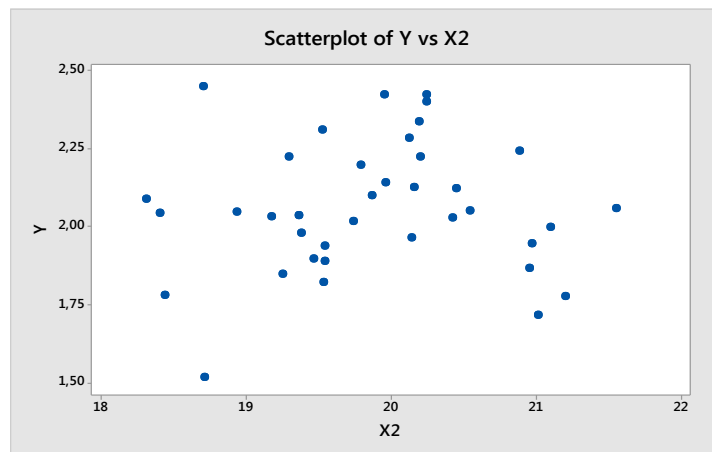
Variabel	Jumlah	Min	Max	Range	Mean	Standard Deviasi
Y	38	1,516	2,447	0,931	2,060	0,212
X_1	38	23,636	32,987	9,351	27,574	1,914
X_2	38	18,320	21,560	3,240	19,884	0,825
X_3	38	41,75	73,92	32,18	63,33	7,03
X_4	38	6,871	31,767	24,896	16,006	5,012
X_5	38	2,470	14,200	11,730	5,573	3,369
X_6	38	14565	348015	333450	43808	56304

Statistik deskriptif yang ditampilkan pada Tabel 4.1 digunakan untuk inisiasi titik-titik knot dan *bandwidth*. Untuk melihat pola hubungan antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor dapat dilihat dari grafik *scatterplot*. Hasil *scatterplot* untuk masing-masing variabel respon dan variabel prediktor adalah sebagai berikut :



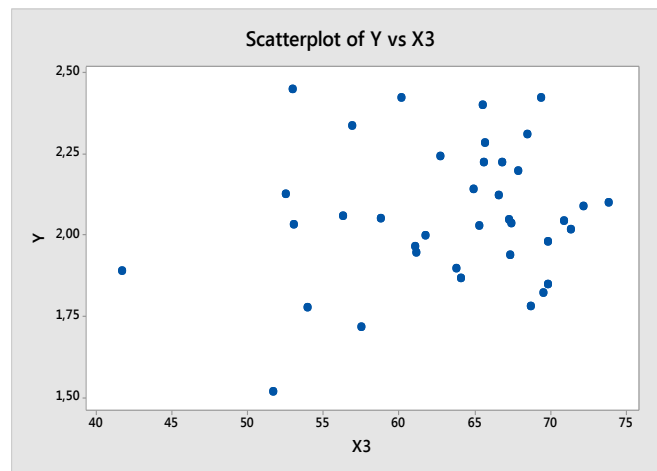
Gambar 4.1 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase jumlah status kawin (X_1).

Dari gambar 4.1 tampak pola hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase jumlah status kawin (X_1) tidak ada kecenderungan membentuk pola tertentu. Angka Fertilitas Total (Y) yang tinggi tidak diperoleh dari persentase jumlah status kawin (X_1) yang tinggi atau yang rendah. Pola hubungan yang berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu dapat didekati dengan regresi spline.



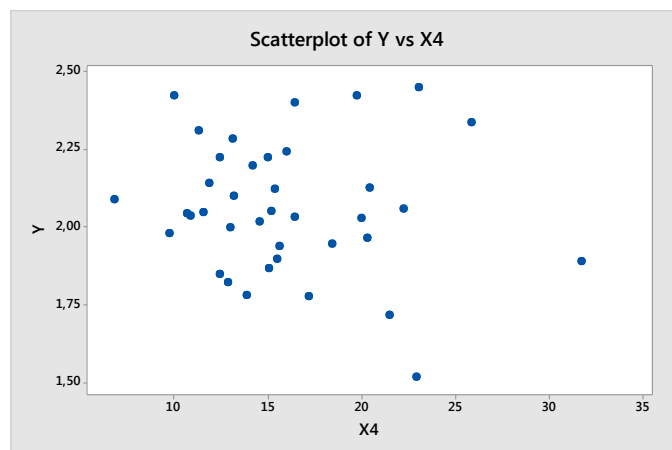
Gambar 4.2 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Rata-rata usia kawin pertama (X_2).

Dari gambar 4.2 tampak pola hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Rata-rata usia kawin pertama (X_2) tidak ada kecenderungan membentuk pola tertentu. Angka Fertilitas Total (Y) tertinggi ternyata tidak diperoleh dari Rata-rata usia kawin pertama (X_2) tertinggi atau terendah. Pola hubungan yang berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu dapat didekati dengan regresi spline.



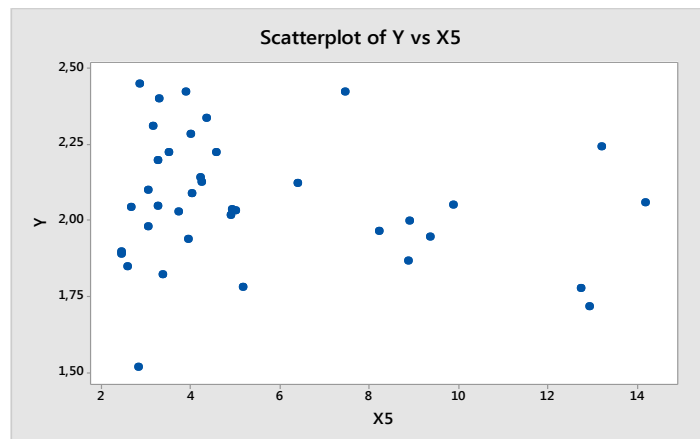
Gambar 4.3 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase CPR (X_3).

Dari gambar 4.3 tampak pola hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase CPR (X_3) tidak ada kecenderungan membentuk pola tertentu. Angka Fertilitas Total (Y) tertinggi ternyata tidak diperoleh dari Presentase CPR (X_2) tertinggi atau terendah. Pola hubungan yang berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu dapat didekati dengan regresi spline.



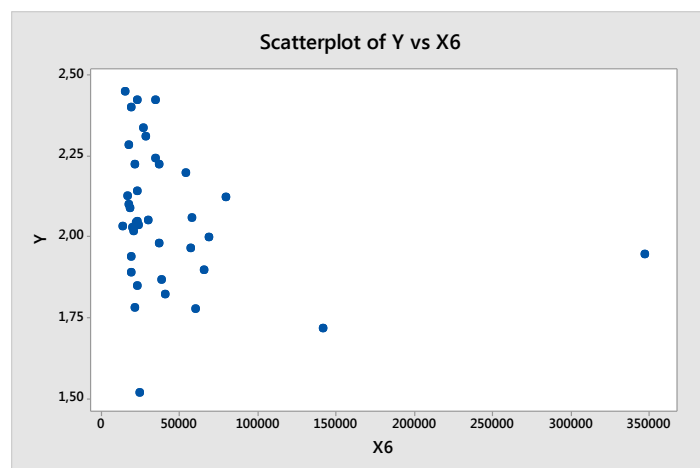
Gambar 4.4 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase *unmet need* (X_4).

Dari gambar 4.4 tampak pola hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase *unmet need* (X_4) tidak ada kecenderungan membentuk pola tertentu. Angka Fertilitas Total (Y) tertinggi ternyata tidak diperoleh dari Presentase *unmet need* (X_4) tertinggi atau terendah. Pola hubungan yang berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu dapat didekati dengan regresi spline.



Gambar 4.5 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5).

Dari gambar 4.5 tampak pola hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan Persentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5) tidak ada kecenderungan membentuk pola tertentu. Angka Fertilitas Total (Y) tertinggi ternyata tidak diperoleh dari Presentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5) tertinggi atau terendah. Pola hubungan yang berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu dapat didekati dengan regresi spline.



Gambar 4.6 *Scatterplot* antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan PDRB perkapita (X_6).

Dari gambar 4.6 tampak hubungan antara Angka Fertilitas Total (Y) dengan PDRB perkapita (X_6) tidak memiliki suatu pola yang jelas. Pola hubungan yang tidak jelas dapat didekati dengan regresi kernel.

Dilihat dari gambar *scatter plot* di atas maka Model Estimasi Campuran Kernel dan Spline merupakan salah satu metode yang tepat, karena terdapat pola hubungan variabel respon dan variabel prediktor yang tidak jelas dan juga ada pola hubungan variabel respon dan variabel prediktor yang cenderung berubah pada sub-sub interval tertentu. Variabel-variabel prediktor Persentase jumlah status kawin (X_1), Rata-rata usia kawin pertama (X_2), Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*) (X_3), Persentase *unmet need* (X_4), Persentase penduduk berpendidikan tinggi (X_5) akan didekati dengan regresi spline linier *truncated*, sedangkan variabel dan PDRB perkapita (X_6) akan didekati dengan fungsi kernel yang notasi penulisan dirubah dari X_6 menjadi t . Model Estimasi Campuran Kernel dan Regresi Spline akan dipilih dengan melihat nilai GCV terkecil dari beberapa model yang menggunakan jumlah titik knot dan *bandwidth* yang berbeda. Penelitian ini menggunakan titik knot dengan jumlah yang sama pada setiap variabel prediktor antara satu sampai dengan tiga titik knot. Proses perbandingan akan ditampilkan sepuluh posisi titik knot yang berbeda pada masing-masing bagian yang mendekati titik knot dan *bandwidth* optimum. Sehingga setelah pengolahan data akan didapatkan nilai GCV dan MSE yang terkecil, *R-Square* yang maksimal, titik knot dan *bandwidth* yang optimal serta nilai parameter dari model terbaik.

4.4.2 Model Regresi Campuran Nonparametrik Kernel dan Spline

Pemilihan Model Regresi Campuran Kernel dan Spline terbaik diperoleh dari penentuan titik-titik knot dan *bandwidth* yang optimal. Penentuan titik knot dan *bandwidth* yang optimal didapatkan dari membandingkan nilai GCV beberapa titik knot dan *bandwidth*, dimulai dari satu titik knot, dua titik knot dan tiga titik knot. Titik knot dan *bandwidth* yang optimal ditunjukkan dari nilai GCV yang terkecil.

4.4.2.1 Pemilihan Titik Knot dan *Bandwidth* Optimal dengan Satu Titik Knot

Pemilihan titik knot dan *bandwidth* yang optimal diawali dengan menggunakan satu titik knot pada masing-masing variabel prediktor spline dan

bandwidth secara bersama-sama. Berikut ini adalah model Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan satu titik knot.

$$\hat{y} = \hat{\theta}_0^* + \hat{\theta}_{11}x_{1i} + \hat{\theta}_{12}x_{2i} + \hat{\theta}_{13}x_{3i} + \hat{\theta}_{14}x_{4i} + \hat{\phi}_{11}(x_{1i} - \lambda_{11})_+ + \hat{\phi}_{12}(x_{2i} - \lambda_{12})_+ + \hat{\phi}_{13}(x_{3i} - \lambda_{13})_+ + \hat{\phi}_{14}(x_{4i} - \lambda_{14})_+ + \hat{\phi}_{15}(x_{5i} - \lambda_{15})_+ + n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{\alpha}(t - t_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_{\alpha}(t - t_j)} \right] y_i$$

Nilai GCV yang dihasilkan dengan menggunakan satu titik knot ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Nilai GCV dengan Satu Titik Knot

No	Knot					Band-width	GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	24,785	18,717	45,689	9,919	3,906	0,021408	0,047699
2	24,976	18,783	46,346	10,427	4,146	0,021751	0,048224
3	24,212	18,518	43,720	8,394	3,188	0,023422	0,048288
4	25,548	18,981	48,315	11,952	4,864	0,023413	0,048298
5	25,357	18,915	47,659	11,443	4,624	0,023066	0,048299
6	25,167	18,849	47,002	10,935	4,385	0,022281	0,048437
7	25,739	19,047	48,972	12,460	5,103	0,023201	0,048447
8	24,022	18,452	43,063	7,886	2,949	0,023824	0,048447
9	25,930	19,113	49,628	12,968	5,343	0,0234	0,04857
10	24,403	18,584	44,376	8,903	3,428	0,02419	0,048588

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat diketahui bahwa nilai GCV minimum yang diperoleh dengan satu titik knot yaitu sebesar 0,047699, dimana titik knot optimumnya pada masing-masing variabel prediktor yaitu sebagai berikut.

$$x_1=24,785; x_2=18,717; x_3=45,689; x_4=9,919; x_5=3,906; \alpha=0,021408$$

4.4.2.2 Pemilihan Titik Knot dan Bandwidth Optimal dengan Dua Titik Knot

Setelah dilakukan pendekatan Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan satu titik knot, selanjutnya dilakukan pendekatan dengan dua titik knot. Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan dua titik knot adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \hat{y} = & \hat{\theta}_0^* + \hat{\theta}_{11}x_{1i} + \hat{\theta}_{12}x_{2i} + \hat{\theta}_{13}x_{3i} + \hat{\theta}_{14}x_{4i} + \hat{\theta}_{15}x_{5i} + \hat{\phi}_{11}(x_{1i} - \lambda_{11})_+ + \\ & \hat{\phi}_{21}(x_{1i} - \lambda_{21})_+ + \hat{\phi}_{12}(x_{2i} - \lambda_{12})_+ + \hat{\phi}_{22}(x_{2i} - \lambda_{22})_+ + \\ & \hat{\phi}_{13}(x_{3i} - \lambda_{13})_+ + \hat{\phi}_{23}(x_{3i} - \lambda_{23})_+ + \hat{\phi}_{14}(x_{4i} - \lambda_{14})_+ + \\ & \hat{\phi}_{24}(x_{4i} - \lambda_{24})_+ + \hat{\phi}_{15}(x_{5i} - \lambda_{15})_+ + \hat{\phi}_{25}(x_{5i} - \lambda_{25})_+ + \\ & n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{\alpha}(t - t_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_{\alpha}(t - t_j)} \right] y_i \end{aligned}$$

Nilai GCV dari pemodelan dengan menggunakan dua titik knot ditunjukkan oleh Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai GCV dengan Dua Titik Knot

No	Knot					Band-width	GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,015574	0,024329
	28,983	20,171	60,133	21,099	9,173		
2	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,015521	0,025333
	29,174	20,238	60,789	21,607	9,412		
3	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,015675	0,025431
	28,983	20,171	60,133	21,099	9,173		
4	27,456	19,642	54,881	17,033	7,258	0,017704	0,025563
	27,647	19,709	55,537	17,541	7,497		
5	27,266	19,576	54,224	16,525	7,018	0,020485	0,025629
	32,608	21,428	72,607	30,754	13,721		
6	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,015668	0,025766
	29,364	20,304	61,446	22,115	9,652		
7	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,015891	0,025851
	28,983	20,171	60,133	21,099	9,173		
8	27,456	19,642	54,881	17,033	7,258	0,016713	0,025932
	27,838	19,775	56,194	18,050	7,737		
9	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,016122	0,026046
	28,983	20,171	60,133	21,099	9,173		
10	27,075	19,510	53,568	16,017	6,779	0,016016	0,026058
	29,555	20,370	62,102	22,623	9,891		

Tabel 4.3 memberikan beberapa alternatif nilai knot untuk masing-masing variabel prediktor. Nilai GCV minimum yang diperoleh dengan 2 titik knot yaitu

0,024329. Titik-titik knot pada tiap variabel prediktor yang menghasilkan nilai GCV minimum yaitu sebagai berikut.

Pada variabel $x_{11}= 27,075$ dan $x_{12} = 28,983$

Pada variabel $x_{21}= 19,510$ dan $x_{22} = 20,171$

Pada variabel $x_{31}= 53,568$ dan $x_{32}= 60,133$

Pada variabel $x_{41}= 16,017$ dan $x_{42} = 21,099$

Pada variabel $x_{51}= 6,779$ dan $x_{52} = 9,173$

Bandwidth $\alpha=0,015574$

4.4.2.3 Pemilihan Titik Knot dan Bandwidth Optimal dengan Tiga Titik Knot

Setelah dilakukan pendekatan Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan satu titik knot dan dua knot, selanjutnya dilakukan pendekatan dengan tiga titik knot. Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan tiga titik knot adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & \hat{\theta}_0^* + \hat{\theta}_{11}x_{1i} + \hat{\theta}_{12}x_{2i} + \hat{\theta}_{13}x_{3i} + \hat{\theta}_{14}x_{4i} + \hat{\theta}_{15}x_{5i} + \hat{\phi}_{11}(x_{1i} - \lambda_{11})_+ + \\ & \hat{\phi}_{21}(x_{1i} - \lambda_{21})_+ + \hat{\phi}_{31}(x_{1i} - \lambda_{31})_+ + \hat{\phi}_{12}(x_{2i} - \lambda_{12})_+ + \hat{\phi}_{22}(x_{2i} - \lambda_{22})_+ + \\ & \hat{\phi}_{32}(x_{2i} - \lambda_{32})_+ + \hat{\phi}_{13}(x_{3i} - \lambda_{13})_+ + \hat{\phi}_{23}(x_{3i} - \lambda_{23})_+ + \hat{\phi}_{33}(x_{3i} - \lambda_{33})_+ + \\ & \hat{\phi}_{14}(x_{4i} - \lambda_{14})_+ + \hat{\phi}_{24}(x_{4i} - \lambda_{24})_+ + \hat{\phi}_{34}(x_{4i} - \lambda_{34})_+ + \hat{\phi}_{15}(x_{5i} - \lambda_{15})_+ + \\ & \hat{\phi}_{25}(x_{5i} - \lambda_{25})_+ + \hat{\phi}_{35}(x_{5i} - \lambda_{35})_+ + n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{\alpha}(t - t_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_{\alpha}(t - t_j)} \right] y_i \end{aligned}$$

Berikut ini merupakan nilai GCV yang didapatkan dengan pemodelan menggunakan tiga titik knot.

Tabel 4.4 Nilai GCV dengan Tiga Titik Knot

No	Knot					Band-width	GCV
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}		
1	25,930	19,113	49,628	12,968	5,343	0.016065	0.014988
	26,502	19,311	51,598	14,492	6,060		
	27,647	19,708	55,537	17,541	7,497		
2	25,739	19,047	48,971	12,460	5,103	0.013001	0.015250
	29,364	20,303	61,446	22,115	9,651		
	30,510	20,100	65,385	25,163	11,088		
3	25,930	19,113	49,628	12,967	5,342	0.018799	0.015308
	26,120	19,180	50,285	13,476	5,582		
	31,272	20,964	68,011	27,196	12,045		
4	25,930	19,113	49,628	12,968	5,343	0.016967	0.015378
	26,502	19,311	51,598	14,492	6,061		
	27,647	19,701	55,537	17,541	7,497		
5	25,930	19,113	49,628	12,968	5,342	0.017296	0.015526
	26,502	19,311	51,598	14,492	6,061		
	27,647	19,701	55,537	17,541	7,497		
6	25,930	19,113	49,628	12,968	5,342	0.017521	0.015592
	26,502	19,311	51,598	14,492	6,061		
	27,647	19,709	55,537	17,541	7,497		
7	25,930	19,113	49,628	12,968	5,342	0.013971	0.015655
	26,693	19,377	52,254	15,001	6,3002		
	27,647	19,709	55,537	17,541	7,497		
8	25,930	19,113	49,628	12,968	5,342	0.017826	0.015660
	26,502	19,311	51,598	14,492	6,061		
	27,647	19,708	55,537	17,541	7,497		
9	26,502	19,311	51,598	14,492	6,061	0.013173	0.015698
	28,029	19,840	56,850	18,558	7,976		
	29,174	20,238	60,790	21,606	9,412		
10	25,739	19,047	48,971	12,460	5,103	0.013572	0.015701
	28,364	20,304	61,446	22,115	9,652		
	30,510	20,700	65,385	25,164	11,088		

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa nilai GCV minimum setiap kombinasi yang didapatkan apabila menggunakan tiga titik knot sama besar yaitu sebesar 0.014988. Titik-titik knot optimal tersebut diberikan sebagai berikut.

Pada variabel $x_{11}=25,930$; $x_{12}=26,502$ dan $x_{13}=27,647$

Pada variabel $x_{21}=19,113$; $x_{22}=19,708$ dan $x_{23}=19,708$

Pada variabel $x_{31}=49,628$; $x_{32}=51,598$ dan $x_{33}=55,537$

Pada variabel $x_{41}=12,968$; $x_{42}=14,492$ dan $x_{43}=17,541$

Pada variabel $x_{51}= 5,343$; $x_{52} = 6,060$ dan $x_{53} = 7,497$

Bandwidth $\alpha=0.016065$

Perbandingan nilai GCV minimum yang diperoleh dengan menggunakan satu knot, dua knot dan tiga knot ditunjukkan oleh Tabel 4.5

Tabel 4.5 Perbandingan Nilai GCV Minimum

Model	GCV
1 Knot	0,047699
2 Knot	0,024329
3 Knot	0.014988

Berdasarkan Tabel 4.5 terlihat bahwa model Regresi Campuran Kernel dan Spline yang memiliki GCV minimum yaitu model regresi dengan tiga titik knot dengan nilai GCV sebesar 0,014988. Hal ini menunjukkan bahwa model Regresi Campuran Kernel dan Spline terbaik yaitu model regresi dengan tiga titik knot sehingga nilai yang akan digunakan pada pemodelan Angka Fertilitas Total di Jawa Timur adalah nilai titik knot optimal dari GCV dengan tiga titik knot.

4.4.3 Penaksiran Parameter Model Regresi Campuran Kernel dan Spline

Model Regresi Campuran Kernel dan Spline terbaik diperoleh dengan menggunakan titik knot yang optimal. Model Regresi Campuran Kernel dan Spline yang terbentuk yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & \hat{\theta}_0^* + \hat{\theta}_{11}x_{1i} + \hat{\theta}_{12}x_{2i} + \hat{\theta}_{13}x_{3i} + \hat{\theta}_{14}x_{4i} + \hat{\theta}_{15}x_{5i} + \hat{\phi}_{11}(x_{1i} - \lambda_{11})_+ + \\ & \hat{\phi}_{21}(x_{1i} - \lambda_{21})_+ + \hat{\phi}_{31}(x_{1i} - \lambda_{31})_+ + \hat{\phi}_{12}(x_{2i} - \lambda_{12})_+ + \hat{\phi}_{22}(x_{2i} - \lambda_{22})_+ + \\ & \hat{\phi}_{32}(x_{2i} - \lambda_{32})_+ + \hat{\phi}_{13}(x_{3i} - \lambda_{13})_+ + \hat{\phi}_{23}(x_{3i} - \lambda_{23})_+ + \hat{\phi}_{33}(x_{3i} - \lambda_{33})_+ + \\ & \hat{\phi}_{14}(x_{4i} - \lambda_{14})_+ + \hat{\phi}_{24}(x_{4i} - \lambda_{24})_+ + \hat{\phi}_{34}(x_{4i} - \lambda_{34})_+ + \hat{\phi}_{15}(x_{5i} - \lambda_{15})_+ + \\ & \hat{\phi}_{25}(x_{5i} - \lambda_{25})_+ + \hat{\phi}_{35}(x_{5i} - \lambda_{35})_+ + n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{\alpha}(t - t_i)}{n^{-1} \sum_{j=1}^n K_{\alpha}(t - t_j)} \right] y_i \end{aligned}$$

Estimasi parameter regresi dapat dilihat pada Tabel 4.6

Tabel 4.6 Estimasi Parameter

Variabel	Parameter	Estimasi
	θ_0	0,034475
x_1	θ_{11}	0,038198
	ϕ_{11}	-0,109970
	ϕ_{21}	0,031121
	ϕ_{31}	-0,005532
x_2	θ_{12}	-0,033838
	ϕ_{12}	-0,186775
	ϕ_{22}	0,156403
	ϕ_{32}	-0,006857
x_3	θ_{13}	0,572908
	ϕ_{13}	-0,312316
	ϕ_{23}	-0,084988
	ϕ_{33}	-0,168729
x_4	θ_{14}	0,141142
	ϕ_{14}	-0,009075
	ϕ_{24}	-0,003382
	ϕ_{34}	0,012925
x_5	θ_{15}	-0,011474
	ϕ_{15}	-0,057044
	ϕ_{25}	0,089060
	ϕ_{35}	-0,003103
<i>bandwidth</i>	α	0.016065

Hasil estimasi parameter pada Tabel 4.6 membentuk persamaan model Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan tiga titik knot sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\hat{y} = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\
& 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ - \\
& 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\
& 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\
& 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\
& 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + \\
& 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\
& 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ - \\
& 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\
& 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \\
& \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y
\end{aligned}$$

Nilai R^2 dari model ini sebesar 92,54% dengan nilai MSE sebesar 0,007792609. Ini berarti bahwa 92,54% Angka Fertilitas Total mampu dijelaskan oleh variabel Persentase jumlah status kawin, Rata-rata usia kawin pertama, Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*), Persentase *unmet need*, Persentase penduduk berpendidikan tinggi, dan PDRB perkapita dalam Model Regresi Campuran Kernel dan Spline dengan tiga titik knot dan *bandwidth* optimum.

4.4.4 Interpretasi Model Regresi Campuran Spline dan Kernel

Model untuk pola data yang mengikuti kurva spline dapat diinterpretasikan, sementara itu, untuk pola data yang mengikuti kurva kernel tidak dapat diinterpretasikan. Berikut ini adalah model masing-masing kelompok data dan interpretasinya:

1) Model untuk variabel Persentase jumlah status kawin

Dengan mengasumsikan data selain persentase jumlah status kawin adalah c_1 , maka diperoleh model umumnya :

$$\hat{y} = 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ + c_1$$

di mana:

$$\begin{aligned} c_1 = & 0,03475 - 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\ & 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\ & 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\ & 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + \\ & 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\ & 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ - \\ & 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\ & 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \\ & \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y \end{aligned}$$

Untuk interpretasi model ini digunakan fungsi seperti berikut :

$$\hat{y} = \begin{cases} 0,038198x_1 + c_1, & x_1 \leq 25,930 \\ 2,851 - 0,071772x_1 + c_1, & 25,930 < x_1 \leq 26,502 \\ 2,026 - 0,040651x_1 + c_1, & 26,502 < x_1 \leq 27,647 \\ 2,179 - 0,046183x_1 + c_1, & x_1 > 27,647 \end{cases}$$

- Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Pamekasan, dan Kab Sampang di mana mempunyai persentase jumlah status kawin kurang dari sama dengan 25,930, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah positif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,038198
- Pada daerah Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto di mana persentase jumlah status kawin berada di rentang nilai lebih dari 25,930 hingga kurang dari sama dengan 26,502, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,071772. Pada data di atas, Kota Mojokerto mempunyai Angka

Fertilitas Total yang paling kecil di antara Kota Kediri dan Kota Batu yakni sebesar 1,87 di mana Kota Batu mempunyai Angka Fertilitas Total sebesar 1,96 dan Kota Kediri sebesar 1,94. Dalam hal ini, berdasarkan data publikasi Badan Pusat Statistik, Kota Mojokerto mempunyai penduduk dengan persentase KB yang paling besar di antara Kota Batu, Kota Kediri, yakni sebesar 64,12% di mana Kota Batu dan Kota Kediri masing-masing sebesar 61,12% dan 61,22%

- c. Pada daerah Kab Bojonegoro, Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, Kab Pasuruan Kab Sidoarjo dan Kab Tuban di mana mempunyai persentase jumlah status kawin berada di rentang nilai lebih dari 26,502 hingga kurang dari sama dengan 27,647, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,040651. Dalam hal ini, daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di atas nilai 2 (cukup tinggi) adalah Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kab Malang, dan Kab Mojokerto cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup kecil. Daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di kurang dari sama dengan 2 (cukup rendah) adalah Kab Bojonegoro, Kota Malang, Kab Pasuruan Kab Sidoarjo dan Kab Tuban cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup besar.
- d. Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Probolinggo, Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase jumlah status kawin lebih dari 25,930, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,046183. Dalam hal ini, daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di atas nilai 2 (cukup tinggi) adalah Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota

Madiun, Kota Surabaya, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Probolinggo dan Kab Tulungagung dikarenakan cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup kecil. Kab Blitar merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas tertinggi, yakni sebesar 2,42 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 60,25%. Daerah dengan nilai Angka Fertilitas di kurang dari sama dengan 2 (cukup rendah) adalah Kab Lumajang, Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek dikarenakan cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup besar. Kota Sumenep merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas terendah, yakni sebesar 1,52 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 68,91%.

2) Model untuk variabel Rata-rata usia kawin pertama

Dengan mengasumsikan data selain rata-rata usia kawin pertama adalah c_2 , maka diperoleh model umumnya :

$$\hat{y} = -0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + c_2$$

Untuk interpretasi model ini digunakan fungsi seperti berikut :

$$\hat{y} = \begin{cases} -0,033838x_2 + c_2, & x_2 \leq 19,113 \\ 3,570 - 0,220613x_2 + c_2, & 19,113 < x_2 \leq 19,311 \\ 0,550 - 0,06421x_2 + c_2, & 19,311 < x_2 \leq 19,708 \\ 0,415 - 0,057353x_2 + c_2, & x_2 > 19,708 \end{cases}$$

dengan

$$\begin{aligned}
c_2 = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\
& 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ + \\
& 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\
& 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + \\
& 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\
& 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ - \\
& 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\
& 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \\
& \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y
\end{aligned}$$

Interpretasi dari model adalah sebagai berikut:

- a. Pada daerah Kab Probolinggo, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kab Sampang, Kab Situbondo dan Kab Sumenep di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama kurang dari sama dengan 19,113, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,033838.
- b. Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Lumajang, Kab Pamekasan di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama berada di rentang nilai lebih dari 19,113 hingga kurang dari sama dengan 19,311, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,220613.
- c. Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Bojonegoro, Kab Lamongan, Kab Madiun, Kab Pasuruan, Kab Trenggalek, Kab Tuban di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama berada di rentang nilai lebih dari 19,113 hingga kurang dari sama dengan 19,708, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,06421.

d. Pada daerah Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lumajang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Jombang, Kab Kediri, Kab Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, dan Kab Sidoarjo, Kota Blitar, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Tulungagung di manamempunyai rata-rata usia kawin pertama lebih dari 19,708, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,057353.

3) Model untuk variabel Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*)

Dengan mengasumsikan data selain persentase CPR adalah c_3 , maka diperoleh model umumnya :

$$\hat{y} = 0,572908x_3 - 0,312316 (x_3 - 49,628)_+ - 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + c_3$$

di mana:

$$\begin{aligned} c_3 = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\ & 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ - \\ & 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\ & 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\ & 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\ & 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ - \\ & 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\ & 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y$$

Untuk interpretasi model ini digunakan fungsi seperti berikut :

$$\hat{y} = \begin{cases} 0,572908x_3 + c_3, & x_3 \leq 49,628 \\ 15,499 - 0,260592x_3 + c_3, & 49,628 < x_3 \leq 51,598 \\ 19,884 - 0,34558x_3 + c_3, & 51,598 < x_3 \leq 55,537 \\ 29,254 - 0,514309x_3 + c_3, & x_3 > 55,537 \end{cases}$$

- a. Pada daerah Kab Bangkalan di mana mempunyai persentase CPR kurang dari sama dengan 49,628, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah positif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,572908. Berdasarkan data publikasi Badan Pusat Statistik, hal ini dikarenakan alat atau cara KB yang mayoritas digunakan penduduk Kab Bangkalan adalah cenderung memakai suntik KB dan pil KB yakni masing-masing sebesar 71,36% dan 21,35%. Alat atau cara KB dengan cara suntik KB dan pil KB rentan mempunyai peluang terjadinya kehamilan cukup besar dibandingkan dengan alat atau cara KB yang lain karena alat atau cara ini mempunyai beberapa kelemahan, di antaranya jika mengkonsumsi pil KB tidak secara tepat dan tidak sesuai aturan (tidak teratur), maka pil KB tersebut akan tidak efektif mencegah kehamilan, dengan kata lain beresiko tinggi terjadinya kehamilan, dan melakukan suntik KB di waktu yang tepat atau waktu yang sesuai untuk melakukan suntik KB, maka akan mencegah terjadinya kehamilan, akan tetapi jika melakukan di waktu yang tidak sesuai dengan aturan, maka suntik KB tidak secara efektif mencegah terjadinya kehamilan.
- b. Untuk persentase CPR berada di rentang nilai lebih dari 49,628 hingga kurang dari sama dengan 51,598, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,260592.
- c. Pada daerah Kota Malang, Kab Pamekasan, Kab Ponorogo, Kab Sampang, Kab Sumenep di mana mempunyai persentase CPR berada di rentang nilai lebih dari 51,598 hingga kurang dari sama dengan 55,537, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,34558.
- d. Pada daerah Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Bojonegoro, Kab Tuban, Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kab Malang, Kab

Mojokerto, Kab Pasuruan dan Kab Sidoarjo, Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Probolinggo, Kab Situbondo, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase CPR lebih dari 51,598, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,514309.

4) Model untuk variabel Persentase *Unmet Need*

Dengan mengasumsikan data selain persentase *unmet need* adalah c_4 , maka diperoleh model umumnya :

$$\hat{y} = 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ + c_4$$

di mana:

$$\begin{aligned} c_4 = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\ & 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ - \\ & 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\ & 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\ & 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\ & 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ - \\ & 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\ & 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \\ & \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y \end{aligned}$$

Untuk interpretasi model ini digunakan fungsi seperti berikut :

$$\hat{y} = \begin{cases} 0,141142x_4 + c_4, & x_4 \leq 12,968 \\ 0,117 - 0,132067x_4 + c_4, & 12,968 < x_4 \leq 14,492 \\ 0,166 - 0,135449x_4 + c_4, & 14,492 < x_4 \leq 17,541 \\ 2,392 - 0,122524x_4 + c_4, & x_4 > 17,541 \end{cases}$$

- a. Pada daerah Kab Bojonegoro, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kab Jombang, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Magetan, Kab Malang, Kab Probolinggo, Kab Tuban di mana mempunyai persentase *unmet need* kurang dari sama dengan 12,968, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah positif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,141142.
- b. Pada daerah Kab Mojokerto, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Sidoarjo, Kab Situbondo di mana mempunyai persentase *unmet need* berada di rentang nilai lebih dari 12,968 hingga kurang dari sama dengan 14,492, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,132067. Dalam hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil.
- c. Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Gresik, Kab Kediri, Kota Blitar, Kota Malang, Kota Mojokerto, Kota Pasuruan, Kab Pacitan, Kab Pamekasan, Kab Pasuruan, Kab Trenggalek di mana mempunyai persentase *unmet need* berada di rentang nilai lebih dari 14,492 hingga kurang dari sama dengan 17,541, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,135449. Dalam hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil.
- d. Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Sampang, Kota Batu, Kota Kediri, Kab Blitar, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Ponorogo, Kab Sumenep, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase *unmet need* lebih dari 17,541, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,122524. Dalam

hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil.

5) Model untuk variabel Persentase penduduk berpendidikan tinggi

Dengan mengasumsikan data selain persentase penduduk berpendidikan tinggi adalah c_5 , maka diperoleh model umumnya :

$$\hat{y} = -0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + c_5$$

di mana:

$$\begin{aligned} c_5 = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\ & 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ + \\ & 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\ & 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\ & 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\ & 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + \\ & 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\ & 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ + \\ & \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y \end{aligned}$$

Untuk interpretasi model ini digunakan fungsi seperti berikut :

$$\hat{y} = \begin{cases} -0,011474x_5 + c_5, & x_5 \leq 5,343 \\ 0,305 - 0,068518x_5 + c_5, & 5,343 < x_5 \leq 6,060 \\ 7,613 - 1,137491x_5 + c_5, & 6,060 < x_5 \leq 7,497 \\ 8,280 - 1,048431x_5 + c_5, & x_5 > 7,497 \end{cases}$$

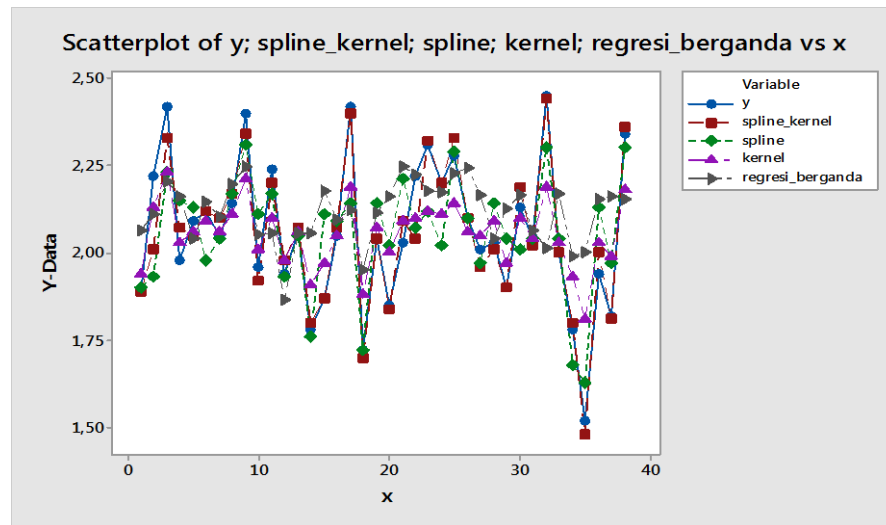
- a. Pada daerah Kab Bangkalan, Kota Pasuruan, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Pamekasan, Kab Sampang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Bojonegoro, Kab Jombang, Kab Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, Kab Pasuruan dan, Kab Banyuwangi, Kab Blitar,

Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, , Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung, Kab Tuban, Kab Kediri di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi kurang dari sama dengan 5,343, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,011474.

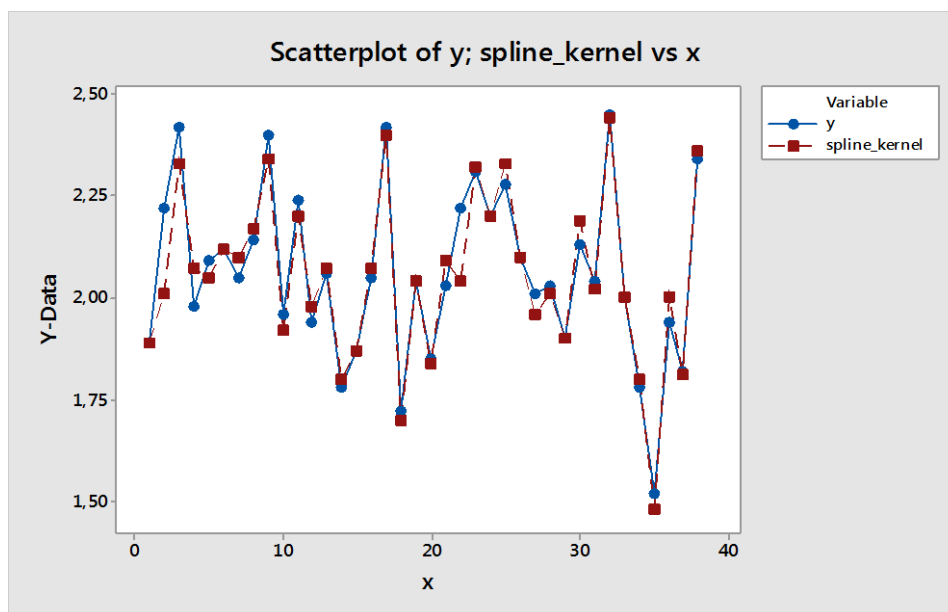
- b. Untuk persentase penduduk berpendidikan tinggi berada di rentang nilai lebih dari 5,343 hingga kurang dari sama dengan 6,060, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,068518.
- c. pada daerah Kab Gresik, Kota Probolinggo di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi berada di rentang nilai lebih dari 6,060 hingga kurang dari sama dengan 7,497, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 1,137491.
- d. Pada daerah Kab Sidoarjo di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi lebih dari 7,497, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 1,048431.

4.3.4 Grafik Perbandingan Hasil Estimasi Beberapa Metode Regresi.

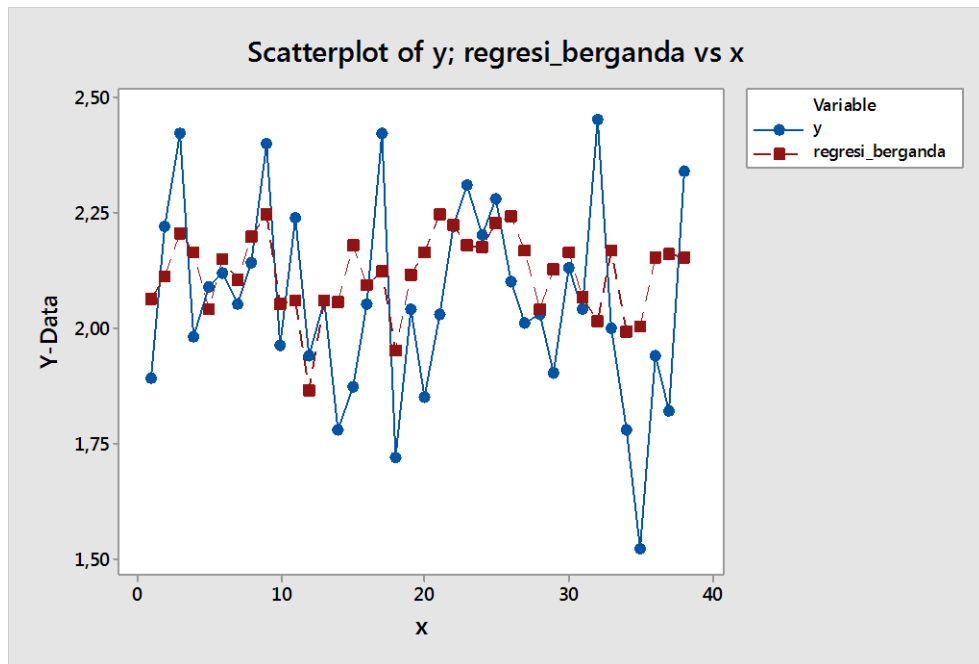
Untuk melihat apakah metode regresi nonparametrik campuran spline dan kernel yang digunakan adalah metode terbaik, maka akan dibandingkan dengan beberapa metode lain, seperti regresi linier berganda, regresi spline, dan regresi kernel yang akan ditunjukkan pada gambar berikut.



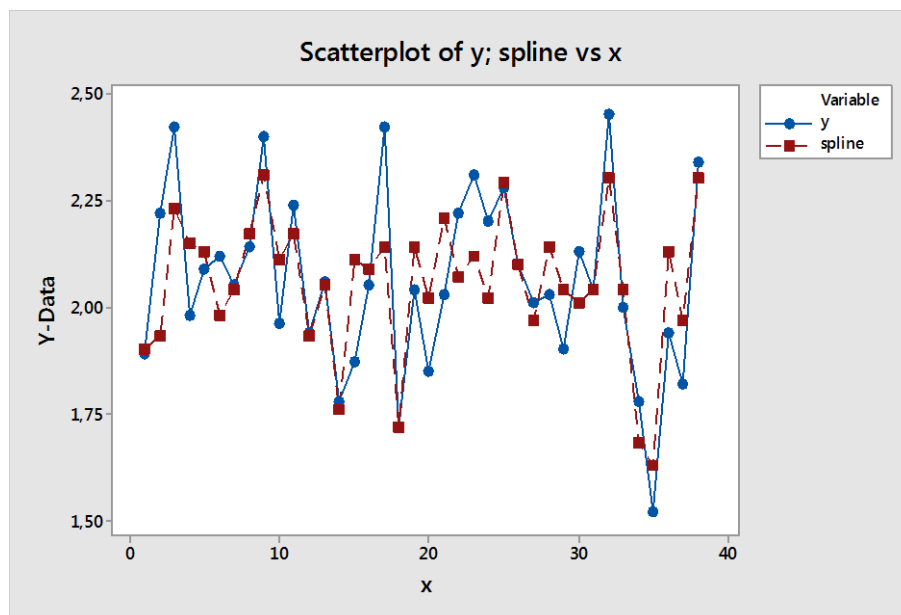
Gambar 4.7 Perbandingan hasil estimasi antara Regresi Campuran Spline dan Kernel, Regresi Spline, Regresi Kernel dan Regresi Linier Berganda



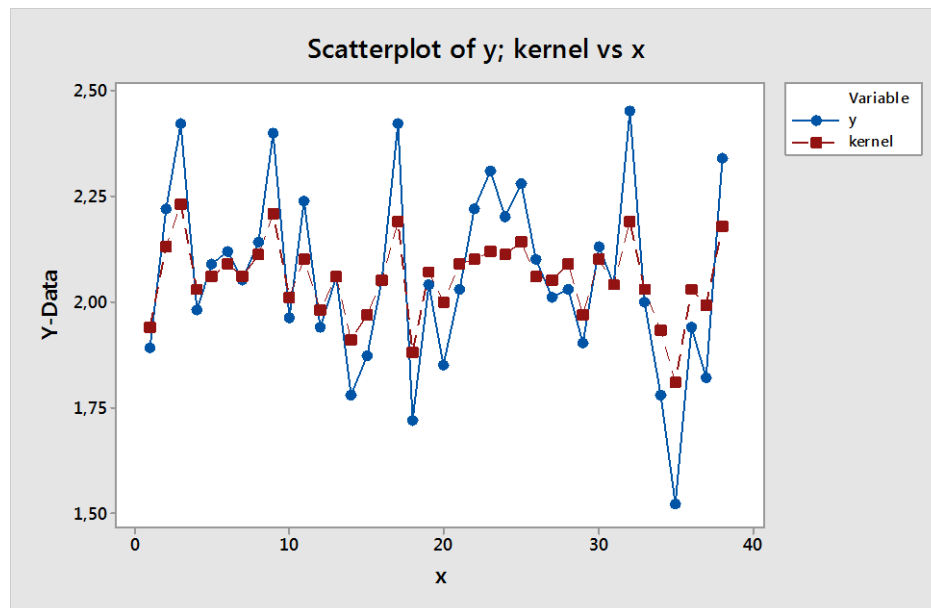
Gambar 4.8 Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (\hat{y}) pada Regresi Campuran Spline dan Kernel



Gambar 4.9 Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada Regresi Linier Berganda



Gambar 4.10 Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (y_{hat}) pada Regresi Spline



Gambar 4.11 Perbandingan grafik scatter plot antara data variabel respon (y) dengan data hasil estimasi (\hat{y}) pada Regresi Kernel

Selanjutnya akan dilihat tabel perbandingan nilai R-square dan MSE dari masing-masing metode yang digunakan dalam Tabel 4.7

Tabel 4.7 Tabel Perbandingan nilai R-square dan MSE

No	Metode	R^2	MSE
1	Regresi Campuran Spline dan Kernel	92,54%	0,007792609
2	Regresi Linier Berganda	18%	0,043
3	Regresi Spline	59%	0,05064144
4	Regresi Kernel	35%	0,03317577

Dapat dilihat pada Tabel 4.8 di mana hasil estimasi dengan menggunakan metode regresi campuran spline dan kernel mempunyai nilai R-square paling besar dan nilai MSE paling kecil, sehingga metode ini dapat dikatakan sebagai metode terbaik di antara metode regresi linier berganda, regresi spline dan regresi kernel.

4.4.5 Pengujian Hipotesis

Selanjutnya akan dilakukan uji hipotesis untuk parameter-parameter komponen spline tiga knot.

Perhatikan uji hipotesis :

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit terdapat satu } \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Tabel Analisis Variansi untuk menguji hipotesis diberikan dalam Tabel 4.8 berikut:

Tabel 4.8 Analisis Varians model Spline Tiga Knot

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Rata-rata Jumlah Kuadrat	F-hitung
Regresi	21	1,5467167	0,073653177	10,0424
Error	16	0,1246818	0,007792609	
Total	37	1,6471053		

Dengan menggunakan tingkat signifikansi 5%, diperoleh nilai distribusi F dengan derajat bebas pembilang 21 dan derajat bebas penyebut 16 sebesar 2,264229. Berdasarkan tabel 4.7 diperoleh kesimpulan menolak H_0 karena nilai $F_{hitung} = 10,0424 > F_{tabel} = 2,264229$. Hal ini menunjukkan bahwa parameter β signifikan pada model.

4.5 Uji Asumsi Residual

a. Uji Identik

Pertama akan dilakukan uji ketaksamaan variansi menggunakan Uji Glejser dengan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \sigma_i^2 \neq \sigma^2; i = 1, 2, \dots, n$$

Tabel Uji Identik akan disajikan pada Tabel 4.9

Tabel 4.9 Uji Identik pada Residual

Variabel	t-hit	p-value	keputusan	kesimpulan
X ₁	0,144	0,886	Terima H ₀	Tidak terjadi heteroskedastisitas
X ₂	0,324	0,748	Terima H ₀	Tidak terjadi heteroskedastisitas
X ₃	0,657	0,516	Terima H ₀	Tidak terjadi heteroskedastisitas
X ₄	0,163	0,871	Terima H ₀	Tidak terjadi

				heteroskedastisitas
X ₅	-0,893	0,379	Terima H ₀	Tidak terjadi heteroskedastisitas
X ₆	-0,098	0,922	Terima H ₀	Tidak terjadi heteroskedastisitas

Berdasarkan tabel di atas, pada tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$, diperoleh untuk setiap parameter maka dapat disimpulkan tidak terjadi masalah heteroskedastisitas pada model yang dihasilkan.

b. Uji Independen

Selanjutnya akan dilakukan uji Independen (uji autokorelasi) menggunakan kriteria *Durbin Watson Test* untuk mendeteksi adanya autokorelasi dalam model dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho_i = 0$ (residual tidak berkorelasi)

$H_1 : \rho_i \neq 0$ (residual berkorelasi)

Statistik Uji:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

Dengan kriteria *Durbin Watson Test* didapatkan nilai $d = 2,046$, dan melihat pada tabel Durbin-Watson dengan jumlah variabel prediktor $k = 6$ dan jumlah observasi $n = 38$ didapatkan nilai $d_L = 1,1463$ dan $d_U = 1,8641$. Keputusan ada atau tidaknya autokorelasi dalam model didasarkan pada Tabel 4.10

Tabel 4.10 Uji Statistik Durbin Watson

Nilai Statistik Durbin-Watson	Keputusan
$0 < d < d_L$	Menolak hipotesis nol; ada autokorelasi positif
$d_L \leq d \leq d_U$	Daerah keragu-raguan; tidak ada keputusan
$d_U \leq d \leq 4 - d_U$	Menerima hipotesis nol; tidak ada autokorelasi positif/negatif
$4 - d_U \leq d \leq 4 - d_L$	Daerah keragu-raguan; tidak ada keputusan

$$4 - d_L \leq d \leq 4$$

Menolak hipotesis nol; ada autokorelasi positif

Widarjono (2007)

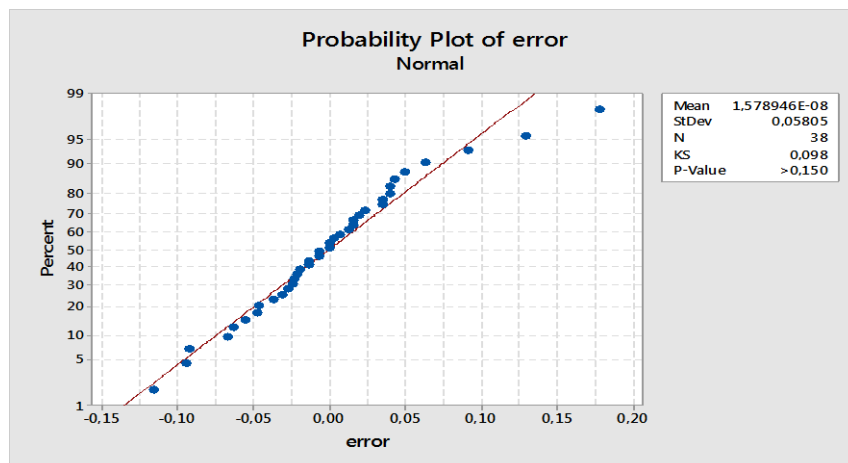
Berdasarkan tabel di atas nilai d berada pada rentang $d_U \leq d \leq 4 - d_U$ yaitu $1,8641 \leq 2,046 \leq (4 - 1,8641)$ atau $1,8641 \leq 2,046 \leq 2,1359$. Dengan demikian dapat diputuskan terima H_0 atau residual tidak berkorelasi.

c. Uji Normalitas

Uji normalitas dapat dilakukan dengan Uji Kolmogorov Smirnov, dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : residual berdistribusi normal

H_1 : residual tidak berdistribusi normal



Gambar 4.12 *Probability Plot of Residual*

Plot normalitas menunjukkan tidak ada penyimpangan terhadap distribusi normal. Hal ini diperkuat dengan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* yang memberikan nilai $p\text{-value} = 0,150 > 0,05$ sehingga gagal tolak H_0 atau residual berdistribusi normal.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka dapat diperoleh kesimpulan:

1. Optimasi dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS) menghasilkan estimator regresi campuran kernel dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{p=1}^q \hat{f}_p(x_{pi}) + \hat{g}_\alpha(t) + \varepsilon \\ &= \mathbf{Z}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}(\alpha)y + \varepsilon \end{aligned}$$

Estimator parameter $\boldsymbol{\beta}$ dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) yang menghasilkan persamaan :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C}(\lambda, \alpha)y$$

dimana :

$$\mathbf{C}(\lambda, \alpha) = \left[(\mathbf{Z}(\lambda))' \mathbf{Z}(\lambda) \right]^{-1} (\mathbf{Z}(\lambda))' (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\alpha))$$

2. Uji hipotesis dalam komponen spline dapat dilakukan dengan menggunakan *Likelihood Ratio Test* dengan formulasi hipotesis sebagai berikut:

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k = 0$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_i \neq 0, \quad i=1,2,\dots,p$$

Diberikan model regresi nonparametrik campuran spline dan kernel dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

Fungsi Likelihood di bawah ruang populasi diberikan oleh:

$$L(\boldsymbol{\beta}_\Omega, \sigma_\Omega^2) = (2\pi\sigma_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\Omega^2}(\mathbf{y}'\mathbf{y} - (\boldsymbol{\beta}_\Omega'\mathbf{T}'\mathbf{y})' - \boldsymbol{\beta}_\Omega'\mathbf{T}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_\Omega'\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\Omega)\right)$$

Fungsi Likelihood di bawah ruang hipotesis diberikan oleh:

$$L(\beta_{\omega}, \sigma_{\omega}^2) = (2\pi\sigma_{\omega}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\omega}^2}(\mathbf{y}'\mathbf{y} - (\beta_{\omega}'\mathbf{T}'\mathbf{y})' - \beta_{\omega}'\mathbf{T}'\mathbf{y} + \beta_{\omega}'\mathbf{T}'\mathbf{T}\beta_{\omega})\right)$$

Kemudian diperoleh *Ratio Likelihood* :

$$L_{ratio} = \frac{\underset{\omega}{Max} L(\beta_{\omega}, \sigma_{\omega}^2)}{\underset{\Omega}{Max} L(\beta_{\omega}, \sigma_{\Omega}^2)}$$

Dengan memperhatikan rumusan dari *Multiplier Lagrange* didapatkan persamaan:

$$L_{ratio} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

dengan

$$\mathbf{Q}_1 = \hat{\beta}_{\Omega}' (\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1} \hat{\beta}_{\Omega}$$

$$\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\beta}_{\Omega})'(\mathbf{y} - \mathbf{T}\hat{\beta}_{\Omega})$$

Selanjutnya diperoleh Statistik Test untuk Uji Hipotesis:

$$F = \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2}$$

Berdasarkan pembuktian teorema Rencher dan Schaalje (2007) didapatkan:

$$\mathbf{Q}_1/\sigma^2 \sim \chi^2(1+(r+m)q)$$

$$\mathbf{Q}_2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-(1+(r+m)q))$$

dan dibuktikan dengan \mathbf{Q}_1 dan \mathbf{Q}_2 *independen*, maka diperoleh distribusi statistik uji:

$$F = \frac{\mathbf{Q}_1/d_1}{\mathbf{Q}_2/d_2} \sim F_{(\alpha; 1+(r+m)q; n-(1+(r+m)q))}$$

Hipotesis H_0 ditolak jika

$$F > k^* \text{ di mana } k^* = \frac{d_2}{d_1} \left(k^{\frac{-2}{n}} - 1 \right)$$

3. Model terbaik berdasarkan ukuran kebaikan model yaitu Nilai R^2 sebesar 92,54% dengannilai MSE sebesar 0,007792609. Model regresi campuran kernel dan spline pada kasus data Angka Fertilitas Total di Provinsi Jawa Timur tahun 2015 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y} = & 0,03475 + 0,038198x_1 - 0,109970(x_1 - 25,930)_+ + \\ & 0,031121(x_1 - 26,502)_+ - 0,005532(x_1 - 27,647)_+ - \\ & 0,033838x_2 - 0,186775(x_2 - 19,113)_+ + \\ & 0,156403(x_2 - 19,311)_+ - 0,006857(x_2 - 19,708)_+ + \\ & 0,572908x_3 - 0,312316(x_3 - 49,628)_+ - \\ & 0,084988(x_3 - 51,598)_+ - 0,168729(x_3 - 55,537)_+ + \\ & 0,141142x_4 - 0,009075(x_4 - 12,968)_+ - \\ & 0,003382(x_4 - 14,492)_+ + 0,012925(x_4 - 17,541)_+ - \\ & 0,011474x_5 - 0,057044(x_5 - 5,343)_+ + \\ & 1,206009(x_5 - 6,060)_+ + 0,089060(x_5 - 7,497)_+ + \\ & \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \left[\frac{\frac{1}{0,016065} K\left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)}{\frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{0,016065} \left(\frac{t-t_i}{0,016065}\right)} \right] y_i\end{aligned}$$

4. Interpretasi model untuk masing-masing variabel komponen spline diberikan oleh:

➤ **Variabel Persentase Jumlah Status Kawin**

- Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Pamekasan, dan Kab Sampang di mana mempunyai persentase jumlah status kawin kurang dari sama dengan 25,930, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah positif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,038198
- Pada daerah Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto di mana persentase jumlah status kawin berada di rentang nilai lebih dari 25,930 hingga kurang dari sama dengan 26,502, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka

Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,071772. Pada data di atas, Kota Mojokerto mempunyai Angka Fertilitas Total yang paling kecil di antara Kota Kediri dan Kota Batu yakni sebesar 1,87 di mana Kota Batu mempunyai Angka Fertilitas Total sebesar 1,96 dan Kota Kediri sebesar 1,94. Dalam hal ini, berdasarkan data publikasi Badan Pusat Statistik, Kota Mojokerto mempunyai penduduk dengan persentase KB yang paling besar di antara Kota Batu, Kota Kediri, yakni sebesar 64,12% di mana Kota Batu dan Kota Kediri masing-masing sebesar 61,12% dan 61,22%

- Pada daerah Kab Bojonegoro, Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, Kab Pasuruan Kab Sidoarjo dan Kab Tuban di mana mempunyai persentase jumlah status kawin berada di rentang nilai lebih dari 26,502 hingga kurang dari sama dengan 27,647, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,040651. Dalam hal ini, daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di atas nilai 2 (cukup tinggi) adalah Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kab Malang, dan Kab Mojokerto cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup kecil, yakni berkisar 55% hingga 60%. Kab Kediri merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total tertinggi, yakni sebesar 2,40 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 58,15%. Daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di kurang dari sama dengan 2 (cukup rendah) adalah Kab Bojonegoro, Kota Malang, Kab Pasuruan Kab Sidoarjo dan Kab Tuban cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup besar, yakni berkisar 60% hingga 64%. Kota Malang merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total terendah, yakni sebesar

1,78 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 63,74%.

- Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Probolinggo, Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase jumlah status kawin lebih dari 25,930, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase jumlah status kawin dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika jumlah status kawin naik 1% maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,046183. Dalam hal ini, daerah dengan nilai Angka Fertilitas Total di atas nilai 2 (cukup tinggi) adalah Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Probolinggo dan Kab Tulungagung dikarenakan cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup kecil. Kab Blitar merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas tertinggi, yakni sebesar 2,42 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 60,25%. Daerah dengan nilai Angka Fertilitas di kurang dari sama dengan 2 (cukup rendah) adalah Kab Lumajang, Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek dikarenakan cenderung mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB cukup besar. Kota Sumenep merupakan daerah dengan nilai Angka Fertilitas terendah, yakni sebesar 1,52 dan mempunyai persentase penduduk yang menggunakan KB sebesar 68,91%.

➤ **Variabel Persentase Rata-rata Usia Kawin Pertama**

- Pada daerah Kab Probolinggo, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kab Sampang, Kab Situbondo dan Kab Sumenep di mana mempunyai

rata-rata usia kawin pertama kurang dari sama dengan 19,113, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,033838.

- Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Lumajang, Kab Pamekasan di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama berada di rentang nilai lebih dari 19,113 hingga kurang dari sama dengan 19,311, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,220613.
- Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Bojonegoro, Kab Lamongan, Kab Madiun, Kab Pasuruan, Kab Trenggalek, Kab Tuban di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama berada di rentang nilai lebih dari 19,113 hingga kurang dari sama dengan 19,708, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,06421.
- Pada daerah Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lumajang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Jombang, Kab Kediri, Kab Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, dan Kab Sidoarjo, Kota Blitar, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, Kab Tulungagung di mana mempunyai rata-rata usia kawin pertama lebih dari 19,708, dapat dilihat bahwa hubungan antara rata-rata usia kawin pertama adalah negatif. Jika rata-rata usia kawin pertama naik 1 tahun, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,057353.

➤ **Variabel Persentase *Contraception Prevalence Rate* (CPR)**

- Pada daerah Kab Bangkalan di mana mempunyai persentase CPR kurang dari sama dengan 49,628, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah positif.

Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,572908. Berdasarkan data publikasi Badan Pusat Statistik, hal ini dikarenakan alat atau cara KB yang mayoritas digunakan penduduk Kab Bangkalan adalah cenderung memakai suntik KB dan pil KB yakni masing-masing sebesar 71,36% dan 21,35%. Alat atau cara KB dengan cara suntik KB dan pil KB rentan mempunyai peluang terjadinya kehamilan cukup besar dibandingkan dengan alat atau cara KB yang lain karena alat atau cara ini mempunyai beberapa kelemahan, di antaranya jika mengkonsumsi pil KB tidak secara tepat dan tidak sesuai aturan (tidak teratur), maka pil KB tersebut akan tidak efektif mencegah kehamilan, dengan kata lain beresiko tinggi terjadinya kehamilan, dan melakukan suntik KB di waktu yang tepat atau waktu yang sesuai untuk melakukan suntik KB, maka akan mencegah terjadinya kehamilan, akan tetapi jika melakukan di waktu yang tidak sesuai dengan aturan, maka suntik KB tidak secara efektif mencegah terjadinya kehamilan.

- Untuk persentase CPR berada di rentang nilai lebih dari 49,628 hingga kurang dari sama dengan 51,598, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,260592.
- Pada daerah Kota Malang, Kab Pamekasan, Kab Ponorogo, Kab Sampang, Kab Sumenep di mana mempunyai persentase CPR berada di rentang nilai lebih dari 51,598 hingga kurang dari sama dengan 55,537, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,34558.
- Pada daerah Kab Gresik, Kota Pasuruan, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Bojonegoro, Kab Tuban, Kab Jombang, Kab Kediri, Kota Blitar, Kab Malang, Kab Mojokerto, Kab Pasuruan dan Kab Sidoarjo, Kab

Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Probolinggo, Kab Situbondo, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase CPR lebih dari 51,598, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase CPR dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase CPR naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,514309.

➤ **Variabel Persentase *Unmet Need***

- Pada daerah Kab Bojonegoro, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kab Jombang, Kota Probolinggo, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Magetan, Kab Malang, Kab Probolinggo, Kab Tuban di mana mempunyai persentase *unmet need* kurang dari sama dengan 12,968, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah positif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total naik sebesar 0,141142.
- Pada daerah Kab Mojokerto, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Sidoarjo, Kab Situbondo di mana mempunyai persentase *unmet need* berada di rentang nilai lebih dari 12,968 hingga kurang dari sama dengan 14,492, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,132067. Dalam hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil. Kab Situbondo merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total paling kecil yaitu sebesar 1,78 dan mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 30,75%, dan pada daerah Kab Nganjuk merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total paling besar yaitu sebesar 2,28, mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 38,47%.

- Pada daerah Kab Banyuwangi, Kab Gresik, Kab Kediri, Kota Blitar, Kota Malang, Kota Mojokerto, Kota Pasuruan, Kab Pacitan, Kab Pamekasan, Kab Pasuruan, Kab Trenggalek di mana mempunyai persentase *unmet need* berada di rentang nilai lebih dari 14,492 hingga kurang dari sama dengan 17,541, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,135449. Dalam hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil. Kota Malang merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total paling kecil yaitu sebesar 1,78 dan mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 28,12%, dan pada daerah Kab Kediri merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total paling besar yaitu sebesar 2,40, mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 38,97%.

- Pada daerah Kab Bangkalan, Kab Sampang, Kota Batu, Kota Kediri, Kab Blitar, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Ponorogo, Kab Sumenep, Kab Tulungagung di mana mempunyai persentase *unmet need* lebih dari 17,541, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase *unmet need* dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase *unmet need* naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun perlahan sebesar 0,122524. Dalam hal ini, dikarenakan daerah-daerah tersebut mempunyai persentase wanita usia subur cenderung kecil. Kota Surabaya merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total paling kecil yaitu sebesar 1,72 dan mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 30,79%, dan pada daerah Kab Sampang merupakan daerah yang mempunyai nilai Angka Fertilitas Total yang paling besar yaitu sebesar 2,45, mempunyai persentase wanita usia subur sebesar 37,40%.

➤ **Variabel Persentase Penduduk Berpendidikan Tinggi**

- Pada daerah Kab Bangkalan, Kota Pasuruan, Kab Lamongan, Kab Lumajang, Kab Pamekasan, Kab Sampang, Kota Batu, Kota Kediri, Kota Mojokerto, Kab Bojonegoro, Kab Jombang, Kab Blitar, Kota Malang, Kab Malang, Kab Mojokerto, Kab Pasuruan dan, Kab Banyuwangi, Kab Blitar, Kab Bondowoso, Kab Jember, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kab Lumajang, Kab Madiun, Kab Magetan, Kab Nganjuk, Kab Ngawi, Kab Pacitan, Kab Ponorogo, , Kab Situbondo, Kab Sumenep, Kab Trenggalek, Kab Tulungagung, Kab Tuban, Kab Kediri di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi kurang dari sama dengan 5,343, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,011474.
- Untuk persentase penduduk berpendidikan tinggi berada di rentang nilai lebih dari 5,343 hingga kurang dari sama dengan 6,060, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 0,068518.
- pada daerah Kab Gresik, Kota Probolinggo di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi berada di rentang nilai lebih dari 6,060 hingga kurang dari sama dengan 7,497, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 1,137491.
- Pada daerah Kab Sidoarjo di mana mempunyai persentase penduduk berpendidikan tinggi lebih dari 7,497, dapat dilihat bahwa hubungan antara persentase penduduk berpendidikan tinggi dengan Angka

Fertilitas Total adalah negatif. Jika persentase penduduk berpendidikan tinggi naik 1%, maka Angka Fertilitas Total turun sebesar 1,048431.

3. Dengan menggunakan tingkat signifikansi 5%, diperoleh nilai distribusi F dengan derajat bebas pembilang 21 dan derajat bebas penyebut 16 sebesar 2,264229. Berdasarkan hasil yang diperoleh sebelumnya diketahui bahwa $F_{hitung}=9,451671$ sehingga kesimpulan dari uji hipotesis adalah menolak H_0 karena nilai $F= 9,451671 > F_{tabel} = 2,264229$. Hal ini menunjukkan bahwa parameter β signifikan pada model.

5.2 Saran

Tindak lanjut dari penelitian ini, maka saran yang dapat diberikan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Badan Pusat Statistik diharapkan lebih memperhatikan daerah-daerah di mana mempunyai perilaku yang berbeda pada daerah dengan jumlah status kawin yang bertambah namun nilai Angka Fertilitas cenderung kecil, pada daerah dengan persentase CPR semakin bertambah namun nilai Angka Fertilitas cenderung besar, dan pada daerah dengan persentase *unmet need* semakin bertambah namun nilai Angka Fertilitas cenderung kecil.
2. Pemerintah Provinsi Jawa Timur diharapkan agar lebih memperhatikan variabel – variabel yang signifikan dan menggali kemungkinan variabel lain yang diperkirakan besar pengaruhnya terhadap Angka Fertilitas Total agar kebijakan yang akan digulirkan untuk peningkatan tingkat kesejahteraan masyarakat lebih tepat sasaran.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

- Aljuhani, K. H.& Al T. L. I. (2014).Modification of the Adaptive Nadaraya-Watson Kernel Regression Estimator.*AcademicJournal*. Vol. 9(22), pp. 966-971.
- Apriyanti, 2014. *Hubungan Tingkat Pendidikan dan Nilai Anak dengan TFR Pasangan Perkawinan Usia Muda*. Diakses pada 01 Agustus 2016;<http://download.portalgaruda.org/article.php>
- Azantaro,2015.*AnalisisFaktor-faktor yang Mempengaruhi Tingkat TFR di Sumatera Utara*.Diaksespadatanggal 02 Agustus 2016;
<http://repository.usu.ac.id>
- Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional, 2011. *Analisa Pendataan Kualitas dan Kuantitas IMP Tahun 2010*, Jakarta: BKKBN.
- Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional, 2015. *Angka Prevalensi Pemakaian Kontrasepsi/CPR*. Diakses pada 01 Agustus 2016;
<http://sirusa.bps.go.id>
- Badan Penelitian dan Pengembangan, 2010. *Perkawinan dan Perceraian*.Diakses pada 01 Agustus 2016; <https://balatbangbengkulu.files.wordpress.com>
- Budiantara, I.N., 2005. Penentuan Titik-Titik Knotsdalam Regresi Spline.Surabaya: *Jurnal Jurusan Statistika FMIPA-ITS*.
- Budiantara, I.N., 2009. *Splinedalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik: Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa Mendatang*, ITS Press, Surabaya.
- Budiantara, I.N., 2011. *Penelitian Bidang Regresi Spline Menuju Terwujudnya Penelitian Statistika yang Mandiri dan Berkarakter*. Prosiding Seminar Nasional FMIPA Undiksha, 9-28.
- Budiantara, I.N., Lestari, B., Islamiyati, 2010. *Estimator SplineTerbobotdalamRegresiNonparametrikdanSemiparametrikHeterokesd astikuntuk Data Longitudinal*. LaporanPenelitianHibahKompetensi, DP2M-DIKTI, Jakarta.

- Budiantara, I.N., Mulianah, 2007. Pemilihan Bandwidth Optimal Dalam Regresi Semiparametrik Kernel dan Aplikasinya, *Journal Sains dan Teknologi SIGMA*, 10 : 159-166.
- Budiantara, I.N., Ratna, M., Zain, I., Wibowo, W., 2012. Modeling the Percentage of Poor People in Indonesia Using Spline Nonparametric Regression Approach. *International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS* vol:12 No:06, 119-124.
- Budiantara, I.N., Ratnasari, Ratna and Zain, 2015. The Combination of Spline and Kernel estimator for Nonparametric Regression and Its Properties, *Applied Mathematical Science*, 9, No 122, 6083-6094.
- Craven, P. & Wahba, G. (1979), *Smoothing Noisy Data with Spline Functions*, *Numerische Mathematics*, 31, 377-403.
- Darmawi, H. & Otok, B.W. (2014). Bootstrap Pada Regresi Linier dan Spline Truncated. *Statistika: Forum Teori dan Aplikasi Statistika*.
- Depkes, 2014. *Profil Kesehatan Indonesia 2014*. Diakses pada 02 Agustus 2016; <http://www.depkes.go.id/resources/download/pusdatin/profil-kesehatan-indonesia/profil-kesehatan-indonesia-2014.pdf>
- Du, P., Parmeter, C. F. and Racine, J.S. (2012). *Nonparametric Kernel Regression with Multiple Predictors and Multiple Shape Constraints*. Department Of Economics Working Paper Series. McMaster University. Canada.
- Eubank, R.L., 1999. *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*, Marcel Dekker : New York.
- Guidoum, A. C., 2015. Kernel Estimator and Bandwidth selection for Density and its Derivatives. *Working Paper*. Faculty of Mathematics. University of Science and Technology Houari Boumediene., Algeria.
- Gujarati, D. (1997). *Ekonometrika Dasar (Terjemahan)*. Jakarta: PT. Gelora Aksara Pratama
- Hadijati, M., 2004. *Estimasi Kernel dalam Regresi Nonparametrik dengan Error Berkorelasi*, Tesis, ITS, Surabaya.
- Hardle, W., 1990. *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Hesikumalasari, 2016. *Pemodelan Regresi Semiparametrik Menggunakan Estimator Campuran Spline Truncated dan Kernel*, Tesis, ITS, Surabaya.
- Hong, S.Y., 1999. Automatic Bandwidth Choice in a Semiparametric Regression Model, *Statistica Sinica*, 9 : 775-794.
- Kayri, M. and Zirhlioglu, G. (2009). Kernel Smoothing Function and Choosing Bandwidth for Nonparametric Regression Methods, *Ozean Journal of Applied Sciences*, 2, 49-54.
- Koorman, Peter, Wunderink, Sophia, 2001. *The Economic of Household Behaviour*. ST. Maritimes Press Inc, New York
- Mantra, Ida B., 2006. *Demografi Umum*, Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Michael P.T., 2000, *Economic Development, Seventh Edition*, New York University, Addison Mesley.
- Montgomery, C. D., & Hines, W. W., 1972. *Probability and Statistics in Engineering and Management science (second edition)*. John Willey & Sons, New York.
- Mundiharno, 1997. Beberapa Teori TFR. Diakses pada 02 agustus 2016; <http://www.akademika.or.id/arsip/FER-T-WD.PDF>
- Nadaraya, E.A, (1964), *On Estimating Regression. Theory of Probability and its Applications* 9(1): 141+2. 141-142.
- Okumura, H. and Naito, K. (2006), Non-Parametrik Kernel Regression for Multinomial Data, *Journal of Multivariate Analysis*, 97, 2009-2022.
- Otok, B.W. (2006). Optimize Knot and Basic Function At Truncated Spline and Multivariate Adaptive Regression Spline. *Proceedings of the first international conference on mathematics and statistics ICOMS* 1 June 19-21 2006 Bandung West Java. Indonesia.
- Purnomo, A.A.S.I, 2016. *Estimator Campuran Kernel dan Regresi Spline Truncated Linier Multivariabel dalam Regresi Nonparametrik*, Tesis, ITS, Surabaya.
- Rencher, Alvin dan Schaalje, G. (2007), *Linear Models in Statistics*, 2nd Edition, John Willey and Sons Inc., New Jersey.
- Rismal, 2016. *Mixture Model of Spline Truncated and Kernel in Multivariable Nonparametric Regression*, Tesis, ITS, Surabaya.

- Rory, 2016. *Regresi Campuran Nonparametrik Spline Linier Truncated dan Fungsi Kernel untuk Pemodelan Data Kemiskinan di Provinsi Papua*, Tesis, ITS, Surabaya.
- Singarimbun, M., 1996. *Penduduk dan Perubahan*. Yogyakarta : Pustaka Pelajar
- Sinuraya, Geser, 1990. *Peranan Program Keluarga Berencana Pemerintah Republik Indonesia Terhadap Kependudukan dalam Ketahanan Nasional Indonesia*. Medan: USU PRESS.
- Srivastava Muni, Ashish Sen, 1994. *Regression Analysis, Theory, Method, and Application*. Springer-Verlag. New York
- Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia, 2012. Diakses pada 02 Agustus 2016; <http://chnrl.org/pelatihan-demografi/SDKI-2012.pdf>
- Syisliawati, 2016. *Statistical Inference for Curve of Nonparametric Regression with Combination of Spline and Kernel estimator*, Tesis, ITS, Surabaya.
- Wahba G., 1990, *Spline Models for Observational Data*, SIAM Pennsylvania
- Watson. G.S. (1964), Smooth Regression Analysis. *Sankhya: The Indian Journal of Statistic*, series A 26 (4), 359-372.
- Westoff, C.F., 2006. *New Estimates of Unmet Need and the Demand for Family Planning*.
- Widarjono, A. (2005). *Ekonometrika: Teori dan Aplikasi untuk Ekonomi dan Bisnis*. Sleman: Ekonisia
- Yao, F.(2007), Asymptotic Distribution of Nonparametrik Regression Estimators for Longitudinal or Fuctional Data, *Journal of Multivariate Analysis*, 98, 40-56.

LAMPIRAN

Lampiran 1.Data Regresi Campuran Kernel dan Spline *Truncated*

Kota/Kabupaten	y	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	t
Bangkalan	1,89	23,64	19,55	41,75	31,77	2,47	19960,2
Banyuwangi	2,22	30,00	19,3	65,62	15,05	3,52	37775,8
Blitar	2,42	28,76	20,25	60,25	19,77	3,92	23377,2
Bojonegoro	1,98	27,63	19,39	69,89	9,80	3,08	37723,7
Bondowoso	2,09	32,99	18,32	72,23	6,87	4,04	19029,1
Gresik	2,12	25,37	20,46	66,64	15,41	6,41	80194,7
Jember	2,05	28,63	18,94	67,34	11,60	3,29	23421,1
Jombang	2,14	26,64	19,97	64,96	11,91	4,23	23487,5
Kediri	2,40	26,98	20,25	65,55	16,46	3,31	19706,1
Kota Batu	1,96	26,26	20,15	61,12	20,32	8,25	57408,4
Kota Blitar	2,24	26,71	20,89	62,81	16,01	13,22	34946,3
Kota Kediri	1,94	26,13	20,98	61,22	18,46	9,38	348015,2
Kota Madiun	2,06	28,10	21,56	56,34	22,27	14,2	58237,5
Kota Malang	1,78	26,87	21,21	54,03	17,20	12,76	60881
Kota Mojokerto	1,87	26,34	20,96	64,12	15,13	8,9	38831,1
Kota Pasuruan	2,05	25,07	20,55	58,82	15,21	9,9	30541,2
Kota Probolinggo	2,42	25,59	19,96	69,44	10,05	7,49	35248,7
Kota Surabaya	1,72	27,37	21,02	57,59	21,50	12,95	142595,2
Lamongan	2,04	25,67	19,37	67,47	10,94	4,95	24272,9
Lumajang	1,85	27,87	19,26	69,91	12,50	2,62	23739,9
Madiun	2,03	29,64	20,43	65,32	20,01	3,75	20521,6

Magetan	2,22	27,94	20,21	66,86	12,52	4,59	22116,5
Malang	2,31	27,24	19,53	68,55	11,37	3,18	29023
Mojokerto	2,20	26,71	19,8	67,94	14,25	3,29	54442,7
Nganjuk	2,28	27,80	20,13	65,70	13,16	4,03	18359,3
Ngawi	2,10	30,33	19,88	73,92	13,26	3,08	18094,1
Pacitan	2,01	28,12	19,75	71,41	14,63	4,92	21035,6
Pamekasan	2,03	25,91	19,18	53,12	16,50	5,04	14564,8
Pasuruan	1,90	27,32	19,47	63,82	15,55	2,47	65928,8
Ponorogo	2,13	28,29	20,17	52,60	20,50	4,26	17192,6
Probolinggo	2,04	28,26	18,41	70,91	10,77	2,69	22514,9
Sampang	2,45	24,70	18,71	53,02	23,11	2,88	15688,8
Sidoarjo	2,00	26,59	21,11	61,83	13,06	8,91	69131,6
Situbondo	1,78	32,09	18,45	68,72	13,94	5,2	22093
Sumenep	1,52	30,24	18,72	51,78	22,95	2,85	25182,4
Trenggalek	1,94	28,67	19,55	67,42	15,65	3,97	19780
Tuban	1,82	27,16	19,54	69,57	12,90	3,4	41810,7
Tulungagung	2,34	28,20	20,2	56,97	25,88	4,38	27825,4

Keterangan :

Y : Angka Fertilitas Total

X₁ : Persentase jumlah status kawin.

X₂ : Rata-rata usia kawin pertama.

X₃ : Persentase CPR (*Contraception Prevalence Rate*)

X₄ : Persentase *unmet need*

X₅ : Persentase penduduk berpendidikan tinggi

t : PDRB perkapita

Lampiran 2. Program Regresi Campuran Kernel dan Spline *Truncated*1 Titik
KnotMenggunakan *Software R*

```
library(pracma)
data=read.csv('d:/datafaulina.csv',sep=';',header=TRUE)
y=data[,1] #variabel y
x=as.matrix(data[,2:7])
xk=as.matrix(x[,c(6)]) #variabel kernel
xs=as.matrix(x[,c(1,2,3,4,5)]) #variabel spline
kn=1 #jumlah titik knot
n=length(y) #jumlah pengamatan
pk=ncol(xk) #jumlah variabel kernel
ps=ncol(xs) #jumlah variabel spline

int.kr=50 #jumlah pembagi titik bandwidth yang diinginkan
int.sp=50 #jumlah pembagi titik knot yang diinginkan
alpha=0.05

#matrix
m1.nn=matrix(1, nrow=n, ncol=n) # matriks 1 nxn
m1.n1=matrix(1, nrow=n) # matriks 1 nx1
mi.nn=diag(1,n,n) # matriks identitas nxn

#penentuan titik knot
knot=matrix(0,int.sp,ps)
for (i in 1:ps)
{
  knot[,i]=seq(min(xs[,i]),max(xs[,i]),length.out=int.sp)
}
knot=as.matrix(knot[2:(int.sp-1),])
nknot=nrow(knot)

if (kn==1){
  knot=as.matrix(knot)
}else if (kn==2)
{
  #knot2
  nkomb=(nknot*(nknot-1)/2)
  knot2=matrix(0,nkomb,kn*ps)
  v=1
  for (i in 1:(nknot-1))
  {
    for (j in (i+1):nknot)
    {
      kk=0
      for (l in 1:ps)
      {
        a=cbind(knot[i,l],knot[j,l])
        kk=cbind(kk,a)
      }
      knot2[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
    }
  }
}
```

```

        v=v+1
    }
}
knot=as.matrix(knot2)
nknot=nrow(knot)
}else
{
    #knot3
    nkomb=(nknot*(nknot-1)*(nknot-2)/6)
    knot3=matrix(0,nkomb,kn*ps)
    v=1
    for (i in 1:(nknot-2))
    {
        for (j in (i+1):(nknot-1))
        {
            for (k in (j+1):nknot)
            {
                kk=0
                for (l in 1:ps)
                {
                    a=cbind(knot[i,l],knot[j,l],knot[k,l])
                    kk=cbind(kk,a)
                }
                knot3[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
                v=v+1
            }
        }
    }
    knot=as.matrix(knot3)
    nknot=nrow(knot)
}

#penentuan bandwidth
bw=matrix(0,int.kr,pk)
for (i in 1:pk)
{
    bw[,i]=seq(0,(max(xk[,i])-min(xk[,i])),length.out=int.kr)
}
bw=as.matrix(bw[2:(int.kr-1),])
nband=nrow(bw)

#desain matriks X(k) pada spline
MSE=matrix(0,nband*nknot)
GCV=matrix(0,nband*nknot)
code=matrix(0,nband*nknot,kn*ps+pk)
o=1
for (i in 1:nknot)
{
    for (j in 1:nband)
    {

```

```

#matrik spline
Z=cbind(1,xs)
a=1
for (k in 1:ps)
{
  for (l in 1:kn)
  {
    Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot[i,a])))
    a=a+1
  }
}

sum.v.phi=0
for (k in 1:pk)
{
  v.diag=diag(xk[,k])
  V=m1.nn %*%v.diag
  z=(t(V)-V)/bw[j,k]
  K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2) #fungsi
kernel gaussian
  K.Z=(1/bw[j,k])*K
  W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%*%m1.n1))%*%m1.nn
  V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
  sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi #nilai kernel
untuk setiap variabel
}
# penimbang kernel gabungan
V.phi=sum.v.phi/pk #nilai kernel rata-rata

#estimasi parameter
beta=0
C=pinv(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%(mi.nn-V.phi)
beta=C%*%y
A=Z%*%C
B=A+V.phi
yhat=B%*%y
error=y-yhat
MSE[o]=n^-1*t(error)%*%error
db=(n^-1*sum(diag(mi.nn-A-V.phi)^2))
GCV[o]=MSE[i]/(1-db)
code[o,]=c(knot[i,],bw[j,])
o=o+1
}
}
optimum=cbind(code,MSE,GCV)
GCVmin=optimum[order(optimum[, (kn*ps+pk+2)]),]
#mengurutkan nilai GCV minimum
knot.opt=GCVmin[1,1:(kn*ps)]
band.opt=GCVmin[1,(kn+ps+1):(kn+ps+pk)]
gcv.opt=GCVmin[1,ncol(GCVmin)]

```

```

#validasi nilai GCV terkecil
#matrik spline
Z=cbind(1,xs)
a=1
for (k in 1:ps)
{
  for (l in 1:kn)
  {
    Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot.opt[a])))
    a=a+1
  }
}

sum.v.phi=0
for (k in 1:pk)
{
  v.diag=diag(xk[,k])
  V=m1.nn %*%v.diag
  z=(t(V)-V)/band.opt[k]
  K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2)          #fungsi      kernel
gaussian
  K.Z=(1/band.opt[k])*K
  W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%*%m1.n1))%*%m1.nn
  V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
  sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi          #nilai kernel untuk
setiap variabel
}
# penimbang kernel gabungan
V.phi=sum.v.phi/pk          #nilai kernel rata-rata

#estimasi parameter
beta=0
C=pinv(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%(m1.nn-V.phi)
beta=C%*%y
A=Z%*%C
B=A+V.phi
yhat=B%*%y
error=y-yhat
db=matrix(NA,nrow=3)
SS=matrix(NA,nrow=3)
MS=matrix(NA,nrow=3)
deci=matrix(0,nrow=(ps*(kn+1)+1))
Fhitung=matrix(NA,nrow=3)
db[1]=11
db[2]=n-db[1]-1
db[3]=n-1
SS[1]=sum((yhat-mean(y))^2)
SS[2]=sum((y-yhat)^2)
SS[3]=sum((y-mean(y))^2)
MS[1]=SS[1]/db[1]

```

```

MS[2]=SS[2]/db[2]
R2=(SS[1]/(SS[1]+SS[2]))*100
#Uji F (Uji Serentak)
Fhitung[1]=MS[1]/MS[2]
ANOVA=cbind(db,SS,MS,Fhitung)
colnames(ANOVA)=c("db","SS","MS","Fhitung")
rownames(ANOVA)=c("Regresi","Error","Total")
Ftabel=qf(0.95,db[1],db[2])
if (Fhitung[1]>Ftabel)
{dec='H0 ditolak'}
else
  dec='H0 gagal ditolak'

write.csv(cbind(y,yhat,error),file="d:/y_yhat_error.csv")
write.csv(Z,file="d:/Z.csv")
write.csv(B,file="d:/estimasiparameter.csv")
write.csv(GCVmin,file="d:/rangkuman GCV.csv")

knot.opt
band.opt
gcv.opt
ANOVA
Ftabel
dec

```

Lampiran 3. Program Regresi Campuran Kernel dan Spline *Truncated2* Titik Knot Menggunakan *Software R*

```
library(pracma)
data=read.csv('d:/datafaulina.csv',sep=';',header=TRUE)
y=data[,1] #variabel y
x=as.matrix(data[,2:7])
xk=as.matrix(x[,c(6)]) #variabel kernel
xs=as.matrix(x[,c(1,2,3,4,5)]) #variabel spline
kn=2 #jumlah titik knot
n=length(y) #jumlah pengamatan
pk=ncol(xk) #jumlah variabel kernel
ps=ncol(xs) #jumlah variabel spline

int.kr=50 #jumlah pembagi titik bandwidth yang diinginkan
int.sp=50 #jumlah pembagi titik knot yang diinginkan
alpha=0.05

#matrix
m1.nn=matrix(1, nrow=n, ncol=n) # matriks 1 nxn
m1.n1=matrix(1, nrow=n) # matriks 1 nx1
mi.nn=diag(1,n,n) # matriks identitas nxn

#penentuan titik knot
knot=matrix(0,int.sp,ps)
for (i in 1:ps)
{
  knot[,i]=seq(min(xs[,i]),max(xs[,i]),length.out=int.sp)
}
knot=as.matrix(knot[2:(int.sp-1),])
nknot=nrow(knot)

if (kn==1){
  knot=as.matrix(knot)
}else if (kn==2)
{
  #knot2
  nkomb=(nknot*(nknot-1)/2)
  knot2=matrix(0,nkomb,kn*ps)
  v=1
  for (i in 1:(nknot-1))
  {
    for (j in (i+1):nknot)
    {
      kk=0
      for (l in 1:ps)
      {
        a=cbind(knot[i,l],knot[j,l])
        kk=cbind(kk,a)
      }
      knot2[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
    }
  }
}
```

```

        v=v+1
    }
}
knot=as.matrix(knot2)
nknot=nrow(knot)
}else
{
    #knot3
    nkomb=(nknot*(nknot-1)*(nknot-2)/6)
    knot3=matrix(0,nkomb,kn*ps)
    v=1
    for (i in 1:(nknot-2))
    {
        for (j in (i+1):(nknot-1))
        {
            for (k in (j+1):nknot)
            {
                kk=0
                for (l in 1:ps)
                {
                    a=cbind(knot[i,l],knot[j,l],knot[k,l])
                    kk=cbind(kk,a)
                }
                knot3[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
                v=v+1
            }
        }
    }
    knot=as.matrix(knot3)
    nknot=nrow(knot)
}

#penentuan bandwidth
bw=matrix(0,int.kr,pk)
for (i in 1:pk)
{
    bw[,i]=seq(0,(max(xk[,i])-min(xk[,i])),length.out=int.kr)
}
bw=as.matrix(bw[2:(int.kr-1),])
nband=nrow(bw)

#desain matriks X(k) pada spline
MSE=matrix(0,nband*nknot)
GCV=matrix(0,nband*nknot)
code=matrix(0,nband*nknot,kn*ps+pk)
o=1
for (i in 1:nknot)
{
    for (j in 1:nband)
    {

```



```

#matrik spline
Z=cbind(1,xs)
a=1
for (k in 1:ps)
{
  for (l in 1:kn)
  {
    Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot[i,a])))
    a=a+1
  }
}

sum.v.phi=0
for (k in 1:pk)
{
  v.diag=diag(xk[,k])
  V=m1.nn %%v.diag
  z=(t(V)-V)/bw[j,k]
  K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2)          #fungsi
kernel gaussian
  K.Z=(1/bw[j,k])*K
  W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%%m1.n1))%%m1.nn
  V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
  sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi          #nilai kernel
untuk setiap variabel
}
# penimbang kernel gabungan
V.phi=sum.v.phi/pk          #nilai kernel rata-rata

#estimasi parameter
beta=0
C=pinv(t(Z)%%Z)%%t(Z)%%(mi.nn-V.phi)
beta=C%%y
A=Z%%C
B=A+V.phi
yhat=B%%y
error=y-yhat
MSE[o]=n^-1*t(error)%%error
db=(n^-1*sum(diag(mi.nn-A-V.phi)^2))
GCV[o]=MSE[i]/(1-db)
code[o,]=c(knot[i,],bw[j,])
o=o+1
}
}
optimum=cbind(code,MSE,GCV)
GCVmin=optimum[order(optimum[, (kn*ps+pk+2)]),]
#mengurutkan nilai GCV minimum
knot.opt=GCVmin[1,1:(kn*ps)]
band.opt=GCVmin[1,(kn+ps+1):(kn+ps+pk)]
gcv.opt=GCVmin[1,ncol(GCVmin)]

```

```

#validasi nilai GCV terkecil
#matrik spline
Z=cbind(1,xs)
a=1
for (k in 1:ps)
{
  for (l in 1:kn)
  {
    Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot.opt[a])))
    a=a+1
  }
}

sum.v.phi=0
for (k in 1:pk)
{
  v.diag=diag(xk[,k])
  V=m1.nn %*%v.diag
  z=(t(V)-V)/band.opt[k]
  K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2)          #fungsi      kernel
gaussian
  K.Z=(1/band.opt[k])*K
  W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%*%m1.n1))%*%m1.nn
  V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
  sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi          #nilai kernel untuk
setiap variabel
}
# penimbang kernel gabungan
V.phi=sum.v.phi/pk          #nilai kernel rata-rata

#estimasi parameter
beta=0
C=pinv(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%(m1.nn-V.phi)
beta=C%*%y
A=Z%*%C
B=A+V.phi
yhat=B%*%y
error=y-yhat
db=matrix(NA,nrow=3)
SS=matrix(NA,nrow=3)
MS=matrix(NA,nrow=3)
deci=matrix(0,nrow=(ps*(kn+1)+1))
Fhitung=matrix(NA,nrow=3)
db[1]=16
db[2]=n-db[1]-1
db[3]=n-1
SS[1]=sum((yhat-mean(y))^2)
SS[2]=sum((y-yhat)^2)
SS[3]=sum((y-mean(y))^2)
MS[1]=SS[1]/db[1]

```

```

MS[2]=SS[2]/db[2]
R2=(SS[1]/(SS[1]+SS[2]))*100
#Uji F (Uji Serentak)
Fhitung[1]=MS[1]/MS[2]
ANOVA=cbind(db,SS,MS,Fhitung)
colnames(ANOVA)=c("db","SS","MS","Fhitung")
rownames(ANOVA)=c("Regresi","Error","Total")
Ftabel=qf(0.95,db[1],db[2])
if (Fhitung[1]>Ftabel)
{dec='H0 ditolak'}
else
  dec='H0 gagal ditolak'

write.csv(cbind(y,yhat,error),file="d:/y_yhat_error.csv")
write.csv(Z,file="d:/Z.csv")
write.csv(B,file="d:/estimasiparameter.csv")
write.csv(GCVmin,file="d:/rangkuman GCV.csv")

knot.opt
band.opt
gcv.opt
ANOVA
Ftabel
dec

```

Lampiran 4. Program Regresi Campuran Kernel dan Spline *Truncated*3 Titik KnotMenggunakan *Software R*

```
library(pracma)
data=read.csv('d:/datafaulina.csv',sep=';',header=TRUE)
y=data[,1] #variabel y
x=as.matrix(data[,2:7])
xk=as.matrix(x[,c(6)]) #variabel kernel
xs=as.matrix(x[,c(1,2,3,4,5)]) #variabel spline
kn=3 #jumlah titik knot
n=length(y) #jumlah pengamatan
pk=ncol(xk) #jumlah variabel kernel
ps=ncol(xs) #jumlah variabel spline

int.kr=50 #jumlah pembagi titik bandwidth yang
diinginkan
int.sp=50 #jumlah pembagi titik knot yang diinginkan
alpha=0.05

#matrix
m1.nn=matrix(1, nrow=n, ncol=n) # matriks 1 nxn
m1.n1=matrix(1, nrow=n) # matriks 1 nx1
mi.nn=diag(1,n,n) # matriks identitas nxn

#penentuan titik knot
knot=matrix(0,int.sp,ps)
for (i in 1:ps)
{

knot[,i]=seq(min(xs[,i]),max(xs[,i]),length.out=int.sp)
}
knot=as.matrix(knot[2:(int.sp-1),])
nknot=nrow(knot)

if (kn==1){
  knot=as.matrix(knot)
}else if (kn==2)
{
  #knot2
  nkomb=(nknot*(nknot-1)/2)
  knot2=matrix(0,nkomb,kn*ps)
  v=1
  for (i in 1:(nknot-1))
  {
    for (j in (i+1):nknot)
    {
      kk=0
      for (l in 1:ps)
      {
        a=cbind(knot[i,l],knot[j,l])
        kk=cbind(kk,a)
      }
    }
  }
}
```

```

    }
    knot2[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
    v=v+1
  }
}
knot=as.matrix(knot2)
nknot=nrow(knot)
}else
{
  #knot3
  nkomb=(nknot*(nknot-1)*(nknot-2)/6)
  knot3=matrix(0,nkomb,kn*ps)
  v=1
  for (i in 1:(nknot-2))
  {
    for (j in (i+1):(nknot-1))
    {
      for (k in (j+1):nknot)
      {
        kk=0
        for (l in 1:ps)
        {
          a=cbind(knot[i,l],knot[j,l],knot[k,l])
          kk=cbind(kk,a)
        }
        knot3[v,]=kk[1,2:ncol(kk)]
        v=v+1
      }
    }
  }
  knot=as.matrix(knot3)
  nknot=nrow(knot)
}

#penentuan bandwidth
bw=matrix(0,int.kr,pk)
for (i in 1:pk)
{
  bw[,i]=seq(0,(max(xk[,i])-
min(xk[,i])),length.out=int.kr)
}
bw=as.matrix(bw[2:(int.kr-1),])
nband=nrow(bw)

#desain matriks X(k) pada spline
MSE=matrix(0,nband*nknot)
GCV=matrix(0,nband*nknot)
code=matrix(0,nband*nknot,kn*ps+pk)
o=1
for (i in 1:nknot)
{

```

```

for (j in 1:nband)
{
  #matrik spline
  Z=cbind(1,xs)
  a=1
  for (k in 1:ps)
  {
    for (l in 1:kn)
    {
      Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot[i,a])))
      a=a+1
    }
  }

  sum.v.phi=0
  for (k in 1:pk)
  {
    v.diag=diag(xk[,k])
    V=m1.nn %%v.diag
    z=(t(V)-V)/bw[j,k]
    K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2)          #fungsi
kernel gaussian
    K.Z=(1/bw[j,k])*K
    W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%%m1.n1))%%m1.nn
    V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
    sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi          #nilai kernel
untuk setiap variabel
  }
  # penimbang kernel gabungan
  V.phi=sum.v.phi/pk          #nilai kernel rata-rata

  #estimasi parameter
  beta=0
  C=pinv(t(Z)%%Z)%%t(Z)%%(m1.nn-V.phi)
  beta=C%%y
  A=Z%%C
  B=A+V.phi
  yhat=B%%y
  error=y-yhat
  MSE[o]=n^-1*t(error)%%error
  db=(n^-1*sum(diag(m1.nn-A-V.phi)^2))
  GCV[o]=MSE[i]/(1-db)
  code[o,]=c(knot[i,],bw[j,])
  o=o+1
}
}
optimum=cbind(code,MSE,GCV)
GCVmin=optimum[order(optimum[, (kn*ps+pk+2)]),]
#mengurutkan nilai GCV minimum
knot.opt=GCVmin[1,1:(kn*ps)]

```

```

band.opt=GCVmin[1,(kn+ps+1):(kn+ps+pk)]
gcv.opt=GCVmin[1,ncol(GCVmin)]
#validasi nilai GCV terkecil
#matrik spline
Z=cbind(1,xs)
a=1
for (k in 1:ps)
{
  for (l in 1:kn)
  {
    Z=cbind(Z, (pmax(0,xs[,k]-knot.opt[a])))
    a=a+1
  }
}

sum.v.phi=0
for (k in 1:pk)
{
  v.diag=diag(xk[,k])
  V=m1.nn %*%v.diag
  z=(t(V)-V)/band.opt[k]
  K=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*z^2)          #fungsi kernel
gaussian
  K.Z=(1/band.opt[k])*K
  W.penyebut=diag(c(1/n*K.Z%*%m1.n1))%*%m1.nn
  V.phi=1/n*K.Z/W.penyebut
#penimbang V(phi).1
  sum.v.phi=sum.v.phi+V.phi          #nilai kernel untuk
setiap variabel
}
# penimbang kernel gabungan
V.phi=sum.v.phi/pk          #nilai kernel rata-rata

#estimasi parameter
beta=0
C=pinv(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%(m1.nn-V.phi)
beta=C%*%y
A=Z%*%C
B=A+V.phi
yhat=B%*%y
error=y-yhat
db=matrix(NA,nrow=3)
SS=matrix(NA,nrow=3)
MS=matrix(NA,nrow=3)
deci=matrix(0,nrow=(ps*(kn+1)+1))
Fhitung=matrix(NA,nrow=3)
db[1]=21
db[2]=n-db[1]-1
db[3]=n-1
SS[1]=sum((yhat-mean(y))^2)
SS[2]=sum((y-yhat)^2)

```

```

SS[3]=sum((y-mean(y))^2)
MS[1]=SS[1]/db[1]
MS[2]=SS[2]/db[2]
R2=(SS[1]/(SS[1]+SS[2]))*100
#Uji F (Uji Serentak)
Fhitung[1]=MS[1]/MS[2]
ANOVA=cbind(db,SS,MS,Fhitung)
colnames(ANOVA)=c("db","SS","MS","Fhitung")
rownames(ANOVA)=c("Regresi","Error","Total")
Ftabel=qf(0.95,db[1],db[2])
if (Fhitung[1]>Ftabel)
{dec='H0 ditolak'}
else
  dec='H0 gagal ditolak'

write.csv(cbind(y,yhat,error),file="d:/y_yhat_error.csv")
)
write.csv(Z,file="d:/Z.csv")
write.csv(B,file="d:/estimasiparameter.csv")
write.csv(GCVmin,file="d:/rangkuman GCV.csv")

knot.opt
band.opt
gcv.opt
ANOVA
Ftabel
dec

```


“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIOGRAFI PENULIS



Penulis bernama Faulina Khusniawati, dilahirkan di Kota Mojokerto, Provinsi Jawa Timur pada tanggal 08 Maret 1991. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara yakni penulis dan adik penulis bernama Rifqi Nur Fajari yang lahir dari pasangan suami-istri bapak H. Bukhori, BA dan Ibu Hj. Atik Salamah, S.Pd, M.Pd.I. Penulis merupakan istri dari H. Mochamad Hasan Bisri, drg juga menantu dari Bapak AKP H. Achmad Mudjiono, SH dan Ibu Hj. Choiridah, S.Pd., M.Si. Penulis menyelesaikan

pendidikan formal sekolah dasar di Madrasah Ibtidaiyah (MI) Al-Mukhsinun pada tahun 2003, kemudian menyelesaikan pendidikan sekolah menengah tingkat pertama di SMP Islam Brawijaya Mojokerto tahun 2006. Selanjutnya menyelesaikan pendidikan sekolah menengah tingkat atas di SMA Darul Ulum 2 Jombang pada tahun 2009. Pada tahun 2009 tersebut, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi sarjana jurusan Matematika di Universitas Airlangga Surabaya. Pada Agustus 2015, penulis mendapatkan kesempatan untuk melanjutkan pendidikan pada Program Magister Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penulis dapat dihubungi di alamat email faulina_math@yahoo.com.

Penulis

Surabaya, Januari 2017